

16.21 Técnicas de diseño y análisis estructural

Primavera 2003

Unidad 9 – Cálculo de variaciones

Sea u la configuración real de una estructura o sistema mecánico. u satisface las condiciones de frontera de desplazamiento: $u = u^*$ sobre S_u . Defina:

$$\bar{u} = u + \alpha v, \text{ donde:}$$

α : escalar

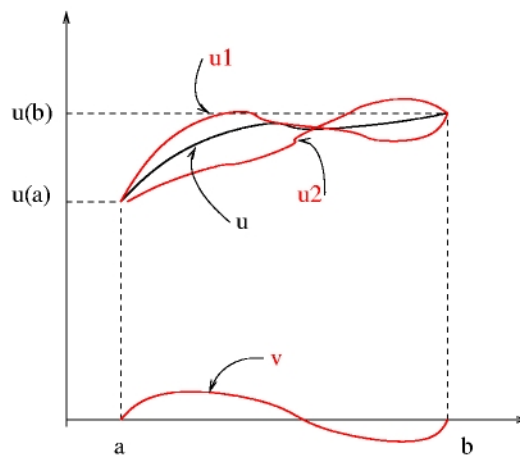
v : función arbitraria tal que $v = 0$ sobre S_u

Vamos a definir αv como δu , la *primera variación* de u :

$$\delta u = \alpha v$$

(1)

Esquemáticamente:



Como primera propiedad de la *primera variación*:

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{du}{dx} + \underbrace{\alpha \frac{dv}{dx}}$$

con lo que podemos identificar $\alpha \frac{dv}{dx}$ con la primera variación del derivado de u :

$$\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \alpha \frac{dv}{dx}$$

Pero:

$$\alpha \frac{dv}{dx} = \frac{\alpha dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\delta u)$$

Concluimos que:

$$\boxed{\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta u)}$$

Considere una función de la siguiente forma:

$$F = F(x, u(x), u'(x))$$

Depende de una variable independiente x , otra función de x ($u(x)$) y su derivada ($u'(x)$).

Considere el cambio en F , donde u (por tanto u') cambia:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x, u + \delta u, u' + \delta u') - F(x, u, u') \\ &= F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v') - F(x, u, u') \end{aligned}$$

expandido en series de Taylor:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F + \frac{\partial F}{\partial u} \alpha v + \frac{\partial F}{\partial u'} \alpha v' + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (\alpha v)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} (\alpha v)(\alpha v') + \dots - F \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} \alpha v + \frac{\partial F}{\partial u'} \alpha v' + h.o.t. \end{aligned}$$

Primera variación total de F :

$$\begin{aligned} \delta F &= \alpha \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\alpha} \right] \\ &= \alpha \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v') - F(x, u, u')}{\alpha} \right] \\ &= \alpha \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial u} \alpha v + \frac{\partial F}{\partial u'} \alpha v'}{\alpha} \right] = \frac{\partial F}{\partial u} \alpha v + \frac{\partial F}{\partial u'} \alpha v' \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'}$$

Observe que:

$$\delta F = \alpha \left. \frac{dF(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

ya que:

$$\frac{dF(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')}{d\alpha} = \frac{\partial F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')}{\partial u} v + \frac{\partial F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')}{\partial u'} v'$$

evaluado a $\alpha = 0$

$$\left. \frac{dF(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} v + \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} v'$$

Observe la analogía con el cálculo diferencial:

$$\delta(aF_1 + bF_2) = a\delta F_1 + b\delta F_2 \quad \text{linealidad}$$

$$\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2$$

etc

Las conclusiones para $F(x, u, u')$ se pueden generalizar a funciones de varias variables independientes x_i y funciones $u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$:

$$F\left(x_i, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Haremos un uso intensivo de estas propiedades del *operador variacional* δ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\delta u) &= \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \delta\left(\frac{du}{dx}\right) \\ \int \delta u dx &= \int \alpha v dx = \alpha \int v dx = \delta\left(\int u dx\right) \end{aligned}$$

Concepto de una funcional

$$I(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$$

Primera variación de una funcional:

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta\left(\int F(x, u(x), u'(x)) dx\right) \\ &= \int \delta\left(F(x, u(x), u'(x))\right) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta I = \int \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'\right) dx}$$

Valor extremo de una **funcional**

“ u_0 ” es el *valor minimo* de una funcional si:

$$I(u) \geq I(u_0) \forall u$$

Una condición necesaria para que una funcional logre un valor extremo en “ u_0 ” es:

$$\delta I(u_0) = 0, \text{ or } \left. \frac{dI}{d\alpha}(u_0 + \alpha v, u'_0 + \alpha v') \right|_{\alpha=0} = 0$$

Observe la analogía con el cálculo diferencial. También hay diferencia porque aquí se requiere que $\frac{dF}{d\alpha} = 0$ en $\alpha = 0$.

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right) dx$$

Integre por partes el segundo término para deshacerse de $\delta u'$.

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right) - \delta u \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx + \left. \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right|_a^b \end{aligned}$$

Se requiere δu para satisfacer las condiciones de frontera de desplazamiento homogéneas:

$$\delta u(b) = \delta u(a) = 0$$

Entonces:

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx = 0,$$

$\forall \delta u$ que satisfice las condiciones de diferenciabilidad apropiadas y las condiciones de frontera esenciales homogéneas. Entonces:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] = 0$$

Estas son las ecuaciones *Euler-Lagrange* correspondientes al problema variacional de hallar un valor extremo de la funcional I .

Condiciones de frontera naturales y esenciales Una condición más débil en δu también permite obtener las ecuaciones de Euler, sólo necesitamos:

$$\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \Big|_a^b = 0$$

lo que se satisface si:

- $\delta u(a) = 0$ y $\delta u(b) = 0$ como antes
- $\delta u(b) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial u'}(b) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0$ y $\delta u(b) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial u'}(b) = 0$

Condiciones de frontera esenciales: $\delta u|_{S_u} = 0$, o $u = u_0$ sobre S_u ,

Condiciones de frontera naturales: $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ sobre S .

Ejemplo: Derive la ecuación de Euler correspondiente a la funcional de energía potencial total $\Pi = U + V$ de una barra elástica de longitud L , módulo Young E , área de sección transversal A fijada en un extremo y sujeta a una carga P en el otro extremo.

$$\Pi(u) = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - Pu(L)$$

Calcule la primera variación:

$$\delta \Pi = \int \frac{EA}{2} \delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - P \delta u(L)$$

Integre por partes:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \left[\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \delta u \right) - \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \delta u \right] dx - P \delta u(L) \\ &= - \int_0^L \delta u \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx + EA \frac{du}{dx} \delta u \Big|_0^L - P \delta u(L) \end{aligned}$$

Fijando $\delta \Pi = 0, \forall \delta u / \delta u(0) = 0$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0}$$

$$P = EA \frac{du}{dx} \Big|_L$$

Extensión a más dimensiones

$$\begin{aligned} I &= \int_V F(x_i, u_i, u_{i,j}) dV \\ \delta I &= \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} \right) dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \delta u_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) \delta u_i \right] dV \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de divergencia:

$$\delta I = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) \right] \delta u_i dV + \int_S \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \delta u_i n_j dS$$

El extremo de la funcional I se obtiene cuando $\delta I = 0$, o cuando:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) = 0}, \text{ y}$$
$$\delta u_i = 0 \text{ sobre } S_u$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} n_j \text{ sobre } S - S_u = S_t$$

Las expresiones en el cuadro constituyen las ecuaciones Euler-Lagrange correspondientes al problema variacional de hallar un valor extremo de la funcional I .