
Clases 6 y 7 - Modulación

Eytan Modiano

Departamento de aeronáutica y astronáutica

Modulación

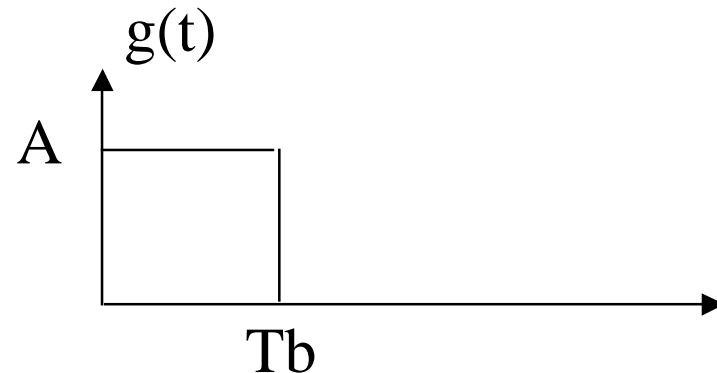
- **Representación de señales digitales como formas de onda analógica**
- **Señales en banda base**
 - **Señales cuyos componentes de frecuencia están concentrados en torno a cero**
- **Señales en banda pasante**
 - **Señales cuyos componentes de frecuencia están centrados en cierta frecuencia f_c lejos de cero**
- **Las señales en banda base se pueden convertir en señales en banda pasante mediante la modulación**
 - **Multiplicación por un senoide con frecuencia f_c**

Señales en banda base

- El sistema de señalización más sencillo es el de modulación de amplitud de pulso (PAM)
 - Con un PAM binario se utiliza un pulso de amplitud A para representar un “1” y un pulso con amplitud $-A$ para representar un “0”
- El pulso más sencillo es el rectangular, pero en la práctica se emplean otros tipos
 - En las clases damos por sentado que hablamos del pulso rectangular
- Si $g(t)$ es la forma del pulso básico, con PAM transmitimos $g(t)$ para representar un “1” y $-g(t)$ para representar un “0”

$$1 \Rightarrow S(t) = g(t)$$

$$0 \Rightarrow S(t) = -g(t)$$



PAM M-ario

- Utiliza niveles de señal M , $A_1 \dots A_M$
 - Cada nivel se puede utilizar para representar $\log_2(M)$ bits
- P.ej., $M = 4 \Rightarrow A_1 = -3, A_2 = -1, A_3 = 1, A_4 = 3$
 - $S_i(t) = A_i g(t)$
- Mapeo de bits a señales

S_i b1b2

S₁ 00

S₂ 01

S₃ 11

S₄ 10

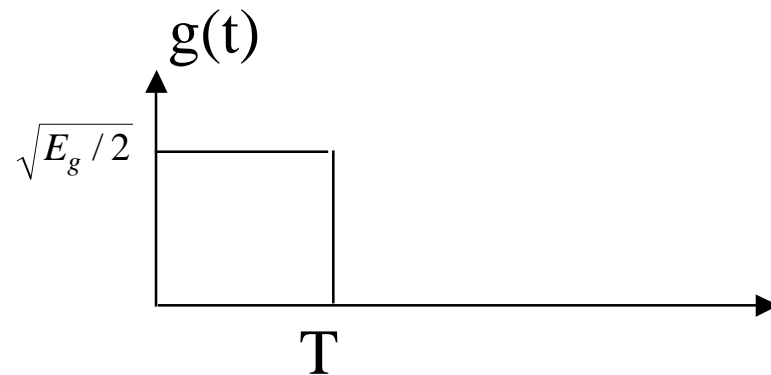
Energía de señal

$$E_m = \int_0^T (S_m(t))^2 dt = (A_m)^2 \int_0^T (g_t)^2 dt = (A_m)^2 E_g$$

- La energía de señal depende de la amplitud
- E_g es la energía del pulso de señal $g(t)$
- Para pulso rectangular con energía $E_g \Rightarrow$

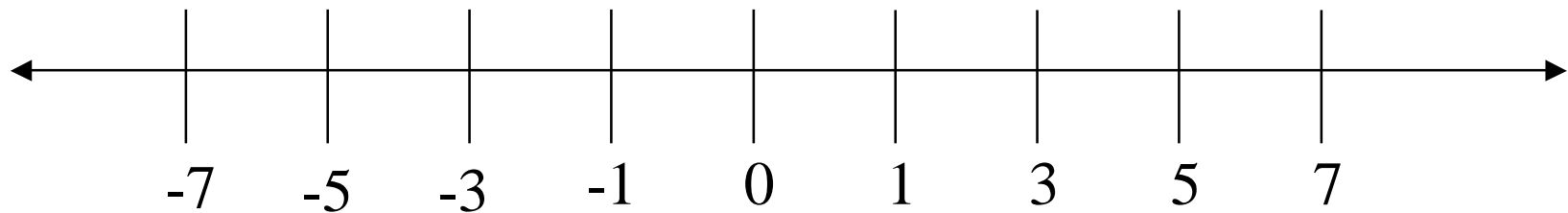
$$E_g = \int_0^T A^2 dt = TA^2 \Rightarrow A = \sqrt{E_g / 2}$$

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{E_g / 2} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$



PAM simétrico

- Las amplitudes de señal son igualmente distantes y simétricas en torno a cero



$$A_m = (2m-1-M), m=1\dots M$$

$$E_{ave} = \frac{E_g}{M} \sum_{m=1}^M (2m-1-M)^2 = E_g (M^2 - 1) / 3$$

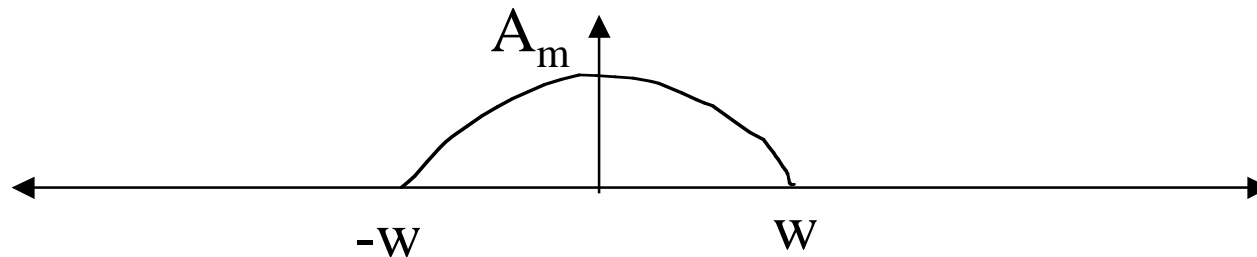
Código Gray

- Mecanismo para asignar *bits* a símbolos de modo que el número de errores de *bit* se minimice
 - Los errores de símbolo más probables están entre niveles adyacentes
 - Interesa establecer una correlación de *bits* con símbolos para que el número de *bits* entre niveles adyacentes se minimice
- El código Gray logra una diferencia de 1 *bit* entre niveles adyacentes
- Ejemplo M= 8 (se puede generalizar)

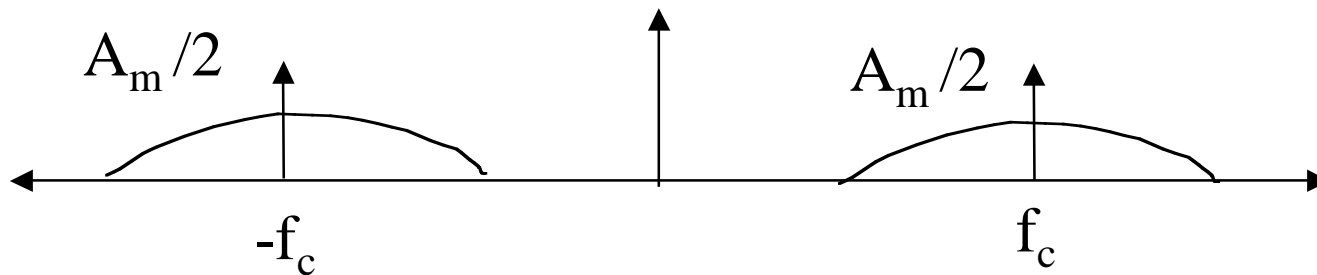
A_1	000
A_2	001
A_3	011
A_4	010
A_5	110
A_6	111
A_7	101
A_8	100

Señales en banda pasante (cont.)

$$F[A_m g(t)] = \text{depende de } g()$$



$$F[A_m g(t) \text{ Cos}(2\pi f_c t)]$$



Recuerde: multiplicación en el tiempo = convolución en frecuencia

Contenido de energía de señales moduladas

$$E_m = \int_{-\infty}^{\infty} U_m^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_m^2 g^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$E_m = \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt + \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) \cos^2(4\pi f_c t) dt$$

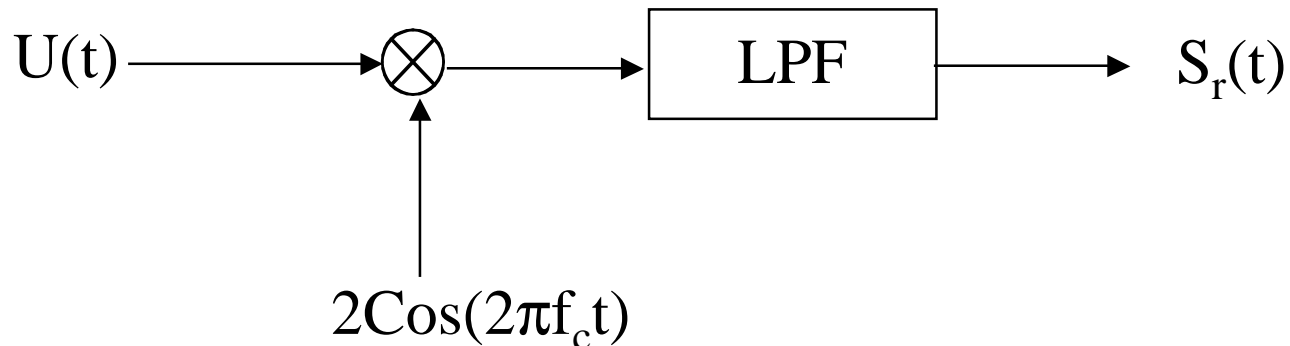
$$E_m = \frac{A_m^2}{2} E_g + \approx 0$$

- La parte de coseno varía rápidamente y se integra a 0
- La señal modulada tiene la mitad de energía que la señal en banda base

Demodulación

- ¿Cómo recuperamos la señal en banda base?

$$\begin{aligned}U_m(t) &= S_m(t)\text{Cos}(2\pi f_c t) \\ &= A_m g(t) \text{Cos}(2\pi f_c t)\end{aligned}$$



$$U(t)2\text{Cos}(2\pi f_c t) = 2S(t)\text{Cos}^2(2\pi f_c t) = S(t) + S(t)\text{Cos}(4\pi f_c t)$$

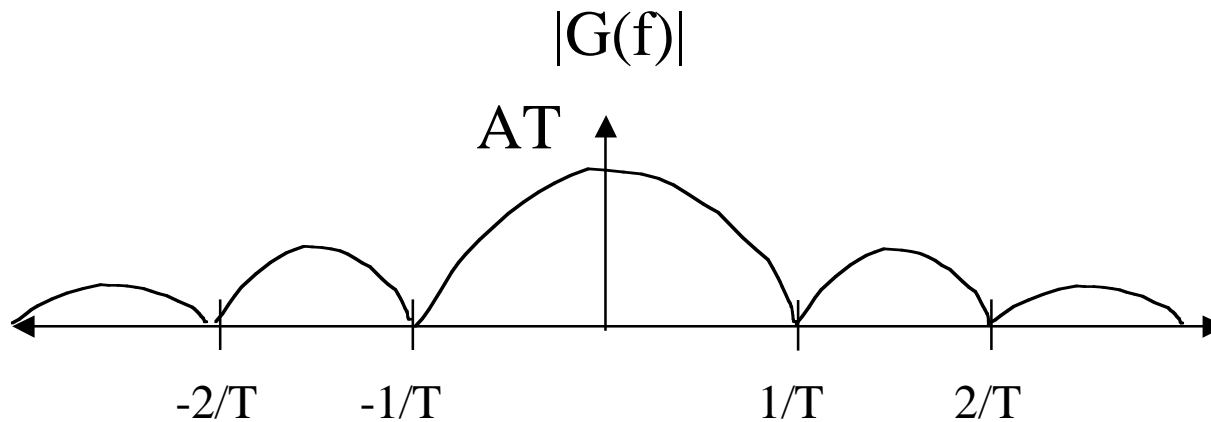
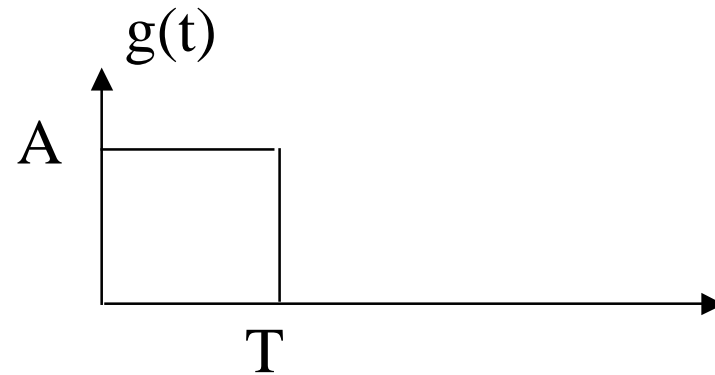
El LPF rechaza el componente de frecuencia superior y nos quedamos con $S(t)$.

Ocupación de ancho de banda

$$G(f) = F[g(t)]$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T Ae^{-j2\pi ft} dt$$

$$G(f) = (AT)\text{Sinc}(\pi fT)e^{-j\pi fT}$$



- Primer “nulo” del ancho de banda = $2(1/T) = 2/T$

Eficacia del ancho de banda

- **R_s = velocidad de símbolos = $1/T$**
 - $\log_2(M)$ bits por símbolo $\Rightarrow R_b$ = velocidad de *bit* = $\log_2(M)/T$ bits por segundo
- **$BW = 2/T = 2R_s$**
 - Eficacia del ancho de banda = $R_b/BW = \log_2(M)/T * (T/2) = \log_2(M)/2$ BPS/Hz
- **Ejemplo:**
 - $M=2 \Rightarrow$ eficacia del ancho de banda = $1/2$
 - $M=4 \Rightarrow$ eficacia del ancho de banda = 1
 - $M=8 \Rightarrow$ eficacia del ancho de banda = $3/2$
- **A medida que aumenta M , aumenta la eficacia del ancho de banda**
- **Sin embargo, a medida que aumenta M somos más propensos a errores ya que los símbolos están más cerca (para un nivel de energía dado)**
 - Necesidad de aumentar el nivel de energía del símbolo para superar errores
 - Relación entre eficacia del ancho de banda y eficacia de la energía

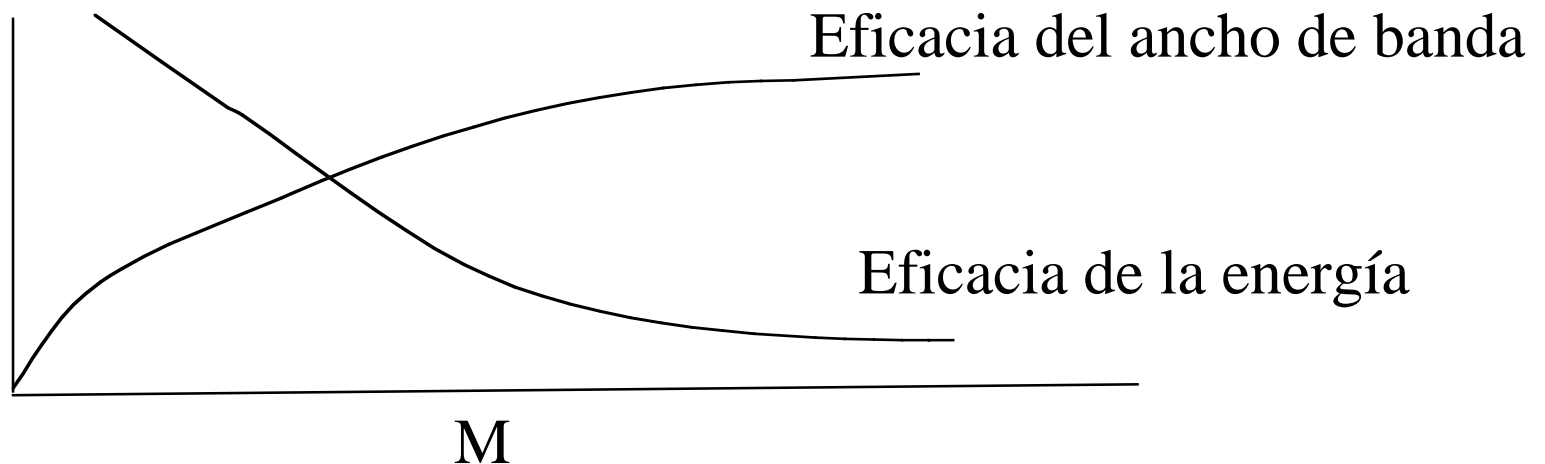
Utilización de energía

$$E_{ave} = \frac{E_g}{M} \sum_{m=1}^M (2m-1-M)^2 = E_g (M^2 - 1) / 3, E_g = \text{energía de pulso básico}$$

Tras la modulación $E_u = \frac{E_s}{2} = E_g (M^2 - 1) / 6$

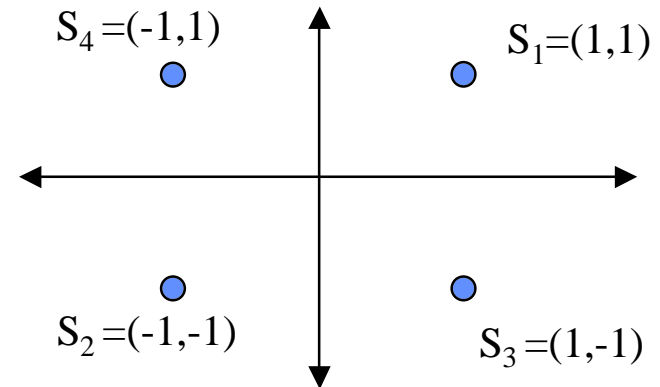
$$E_b = \text{energía promedio por bit} = \frac{(M^2 - 1)}{6 \log_2(M)} E_g$$

- La energía promedio por *bit* aumenta con M



Señales bidimensionales

- $S_i = (S_{i1}, S_{i2})$
- El conjunto de puntos de señal se denomina constelación



- Las constelaciones bidimensionales se utilizan comúnmente
- Las constelaciones grandes se pueden utilizar para transmitir muchos *bits* por símbolo
 - Mayor eficacia de banda ancha
 - Mayor propensión a errores
- La “forma” de la constelación se puede utilizar para minimizar la probabilidad de error separando los símbolos lo más posible
- Constelaciones comunes
 - QAM: *Quadrature Amplitude Modulation*
PAM en dos dimensiones
 - PSK: *Phase Shift Keying*
Constelación especial en la que todos los símbolos tienen la misma potencia

M-QAM simétrica

$$S_m = (A_m^x, A_m^y), A_m^x, A_m^y \in \{+/-1, +/-3, \dots, +/- (\sqrt{M} - 1)\}$$

M es el número total de puntos de señal (símbolos)

\sqrt{M} niveles de señal en cada eje

Constelación simétrica

$$\Rightarrow M = K^2, \text{ para cierto } K$$

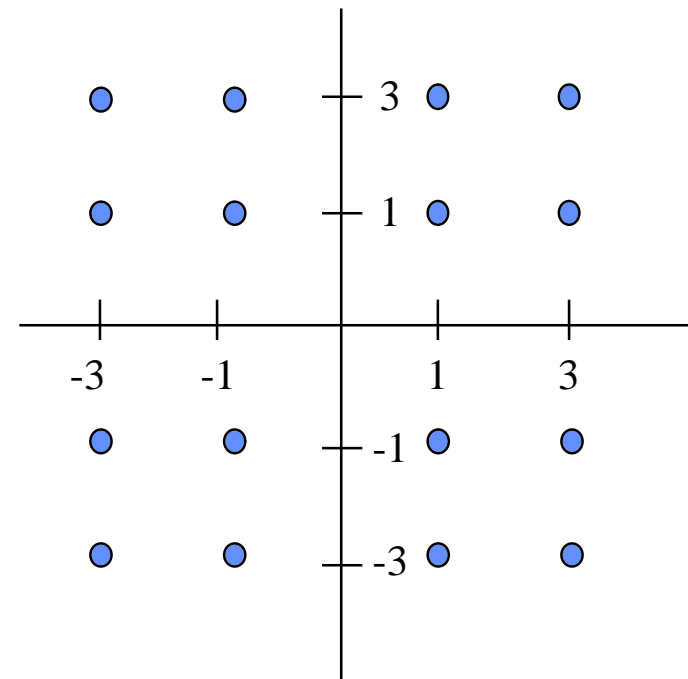
Los niveles de señal en cada eje

son los mismos que para PAM

$$E.g., 4-QAM \Rightarrow A_m^x, A_m^y \in \{+/-1\}$$

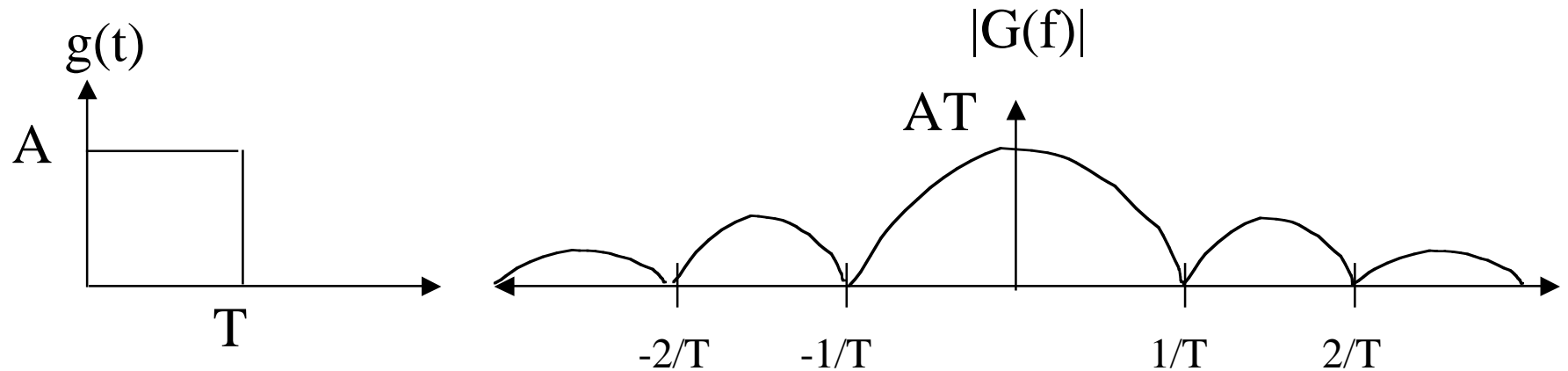
$$16-QAM \Rightarrow A_m^x, A_m^y \in \{+/-1, +/-3\}$$

16-QAM



Ocupación de ancho de banda de QAM

- Si usamos un pulso rectangular, la transformada de Fourier es una función Sinc



- El ancho de banda del primer nulo sigue siendo $2/T$
 - $K = \text{Log}_2(M)$ bits por símbolo
 - $R_b = \text{Log}_2(M)/T$
 - Eficacia del ancho de banda = $R_b/BW = \text{Log}_2(M)/2$
 - => “Igual que para PAM”

Eficacia de la energía

$$E_{sm} = [(A_m^x)^2 + (A_m^y)^2] E_g$$

$$E[(A_m^x)^2] = E[(A_m^y)^2] = \frac{K^2 - 1}{3} = \frac{M - 1}{3}, \quad K = \sqrt{M}$$

$$\bar{E}_s = \frac{2(M - 1)}{3} E_g$$

$$\text{energía transmitida} = \frac{\bar{E}_s}{2} = \frac{(M - 1)}{3} E_g$$

$$E_b (QAM) = \text{Energía} / \text{bit} = \frac{(M - 1)}{3 \text{Log}_2(M)} E_g$$

- **Comparar con PAM: Eb aumenta con M, pero no tan rápido como PAM**

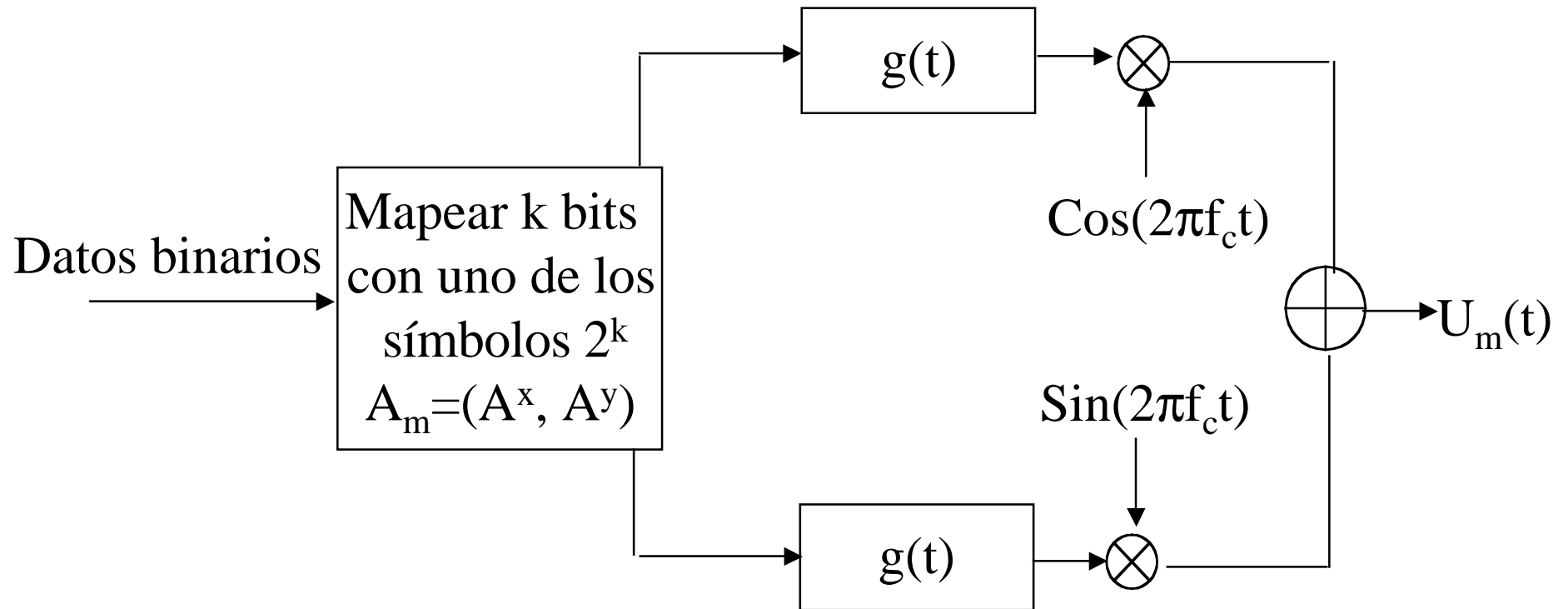
$$E_b (PAM) = \frac{(M^2 - 1)}{6 \text{Log}_2(M)} E_g$$

QAM banda pasante

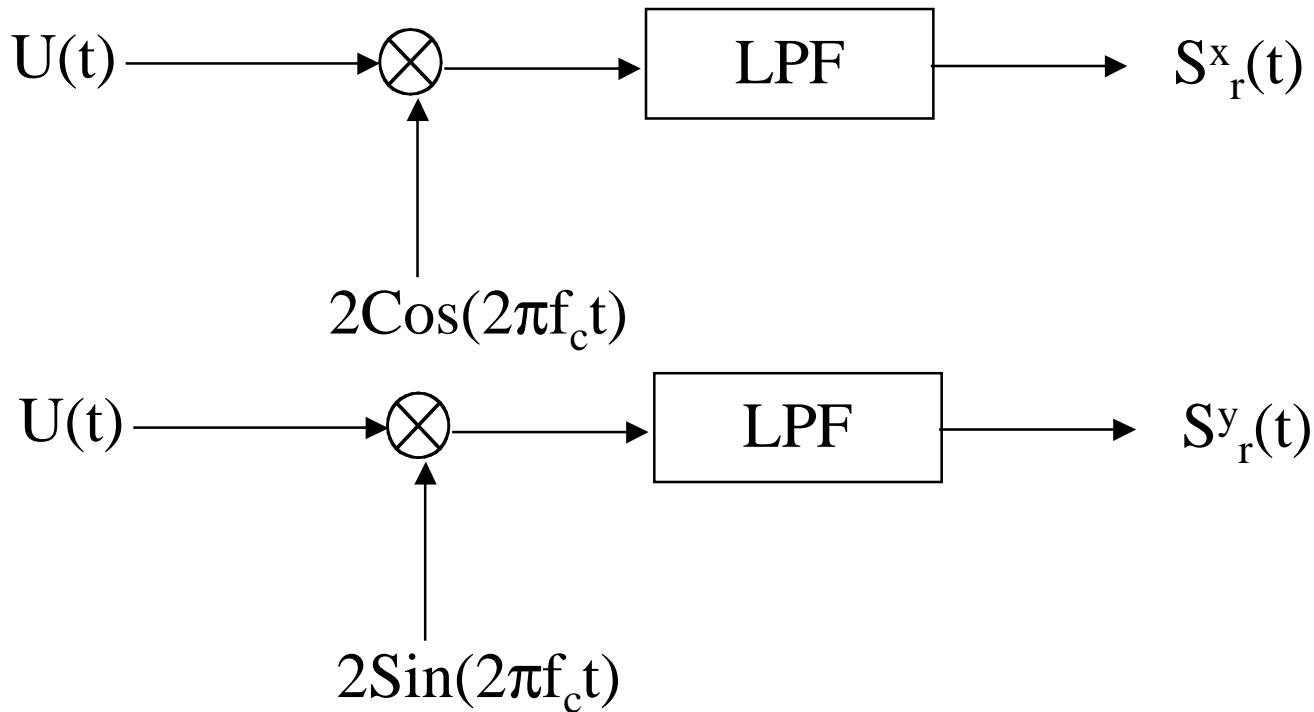
- **Module la señal bidimensional multiplicando mediante portadores ortogonales (sinusoides): seno (Sin) y coseno (Cos)**
 - Esto se logra multiplicado el componente A^x por Cos y el componente A^y por Sin
 - Generalmente, estos componentes no se conocen como x,y sino más bien como A^c o A^s para cos y sin o a veces como A^Q , y A^I para los componentes de cuadratura o de señal en fase
- **La señal transmitida, correspondiente al símbolo m^{th} es:**

$$U_m(t) = A_m^x g(t) \text{Cos}(2\pi f_c t) + A_m^y g(t) \text{Sin}(2\pi f_c t), m = 1 \dots M$$

Modulador



Demodulación: recuperación de las señales en banda base



- Sobre una duración de símbolo, $\text{Sin}(2\pi f_c t)$ y $\text{Cos}(2\pi f_c t)$ son ortogonales
 - Con tal de que la duración de símbolo sea un número entero de ciclos de la onda portadora ($f_c = n/T$) para cierto n
- Si se multiplica por un seno, el componente coseno de $U(t)$ desaparece lo mismo que el componente seno al multiplicarlo por coseno

Demodulación, cont.

$$U(t)2\text{Cos}(2\pi f_c t) = 2A^x g(t)\text{Cos}^2(2\pi f_c t) + 2A^y g(t)\text{cos}(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$\text{Cos}^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow U(t)2\text{Cos}(2\pi f_c t) = S^x(t) + S^x(t)\cos(4\pi f_c t) \approx S^x(t) = A^x g(t)$$

Del mismo modo,

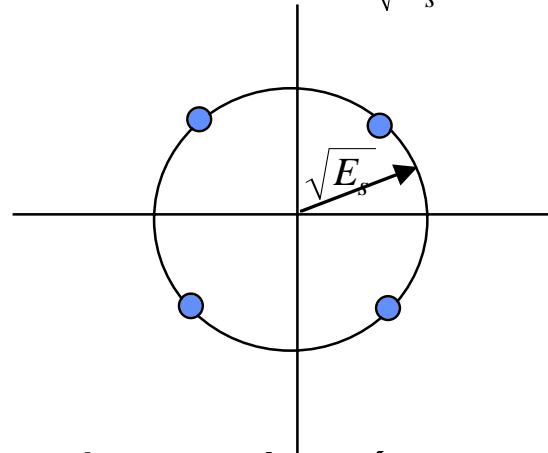
$$U(t)2\text{Sin}(2\pi f_c t) = 2A^x g(t)\text{Cos}(2\pi f_c t)\text{Sin}(2\pi f_c t) + 2A^y g(t)\sin^2(2\pi f_c t)$$

$$\text{Sin}^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

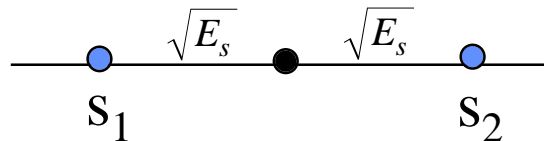
$$\Rightarrow U(t)2\text{Sin}(2\pi f_c t) = S^y(t) - S^y(t)\cos(4\pi f_c t) \approx S^y(t) = A^y g(t)$$

Phase Shift Keying (PSK)

- Señales bidimensionales donde todos los símbolos tienen los mismos niveles de energía
 - P.ej., están en un círculo o radio $\sqrt{E_s}$



- Los símbolos se pueden espaciar unívocamente para minimizar la probabilidad de errores
- P. ej., PSK binario



- 4-PSK (arriba) igual que 4-QAM

M-PSK

$$A_i^x = \text{Cos}(2\pi i / M), A_i^y = \text{Sin}(2\pi i / M), m = 0, \dots, M - 1$$

$$U_m(t) = g(t)A_m^x \text{Cos}(2\pi f_c t) - g(t)A_m^y \text{Sin}(2\pi f_c t)$$

$$\text{Observe : } \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) = \frac{\text{Cos}(\alpha - \beta) + \text{Cos}(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(\beta) = \frac{\text{Cos}(\alpha - \beta) - \text{Cos}(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\text{De ahí, } U_m(t) = g(t)\text{Cos}(2\pi f_c t + 2\pi m / M)$$

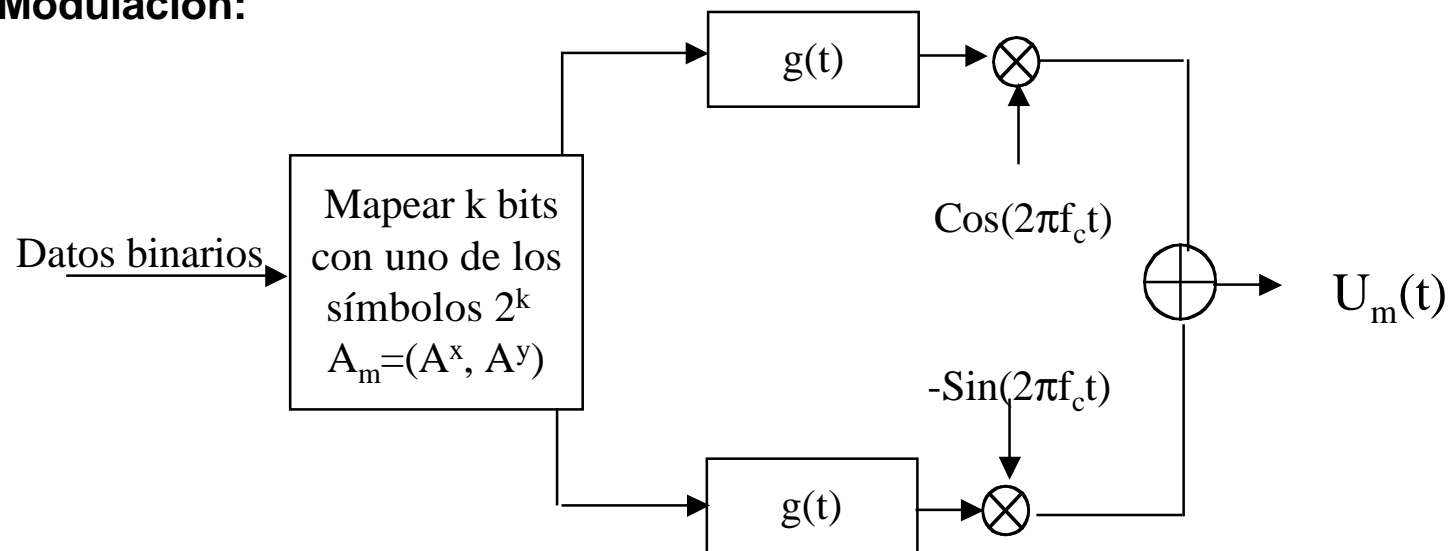
$$\phi_m = 2\pi m / M = \text{cambio de fases del símbolo } m^{\text{th}}$$

$$U_m(t) = g(t)\text{Cos}(2\pi f_c t + \phi_m), m = 0 \dots M - 1$$

Resumen de M-PSK

- **Constelación de M símbolos desplazados de fase (*M Phase shifted symbols*)**
 - Todos tienen los mismos niveles de energía
 - $K = \text{Log}_2(M)$ bits por símbolo

- **Modulación:**



- **Observe que para PSK restamos el componente Sin del componente Cos**
 - Únicamente a efectos de anotación. Si sumásemos, el desplazamiento de fase habría sido negativo, pero el resultado final sería el mismo
- **La demodulación es la misma que para QAM**