



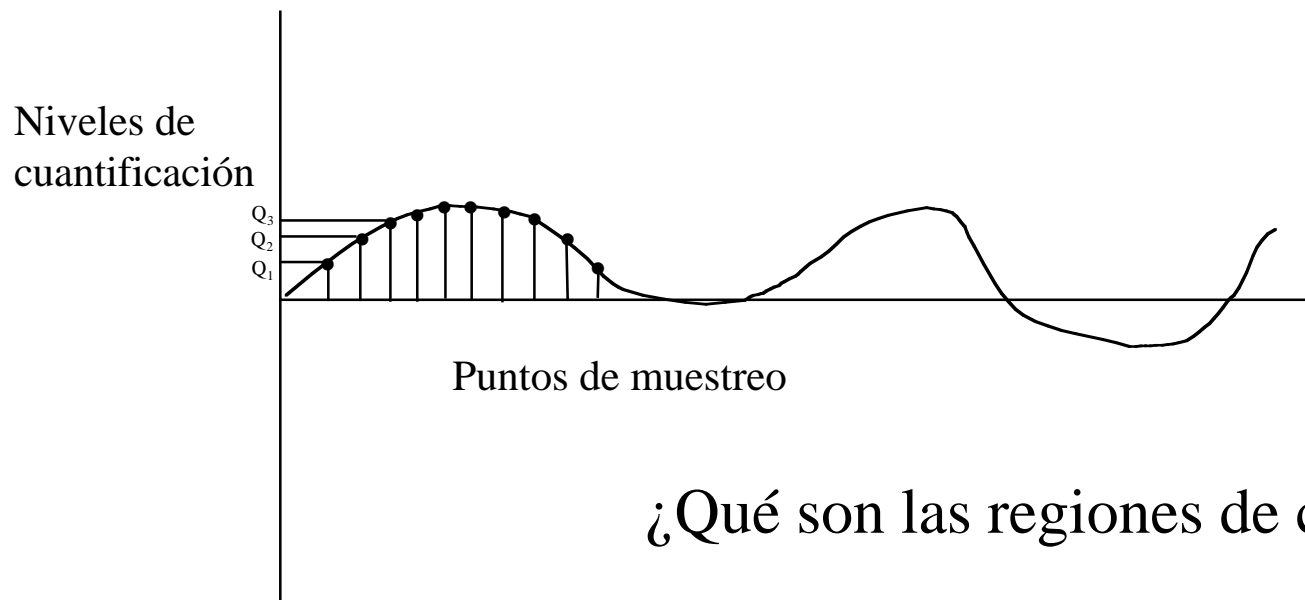
Clase 4: Cuantificación

Eytan Modiano

Departamento de astronáutica y aeronáutica

Muestreo

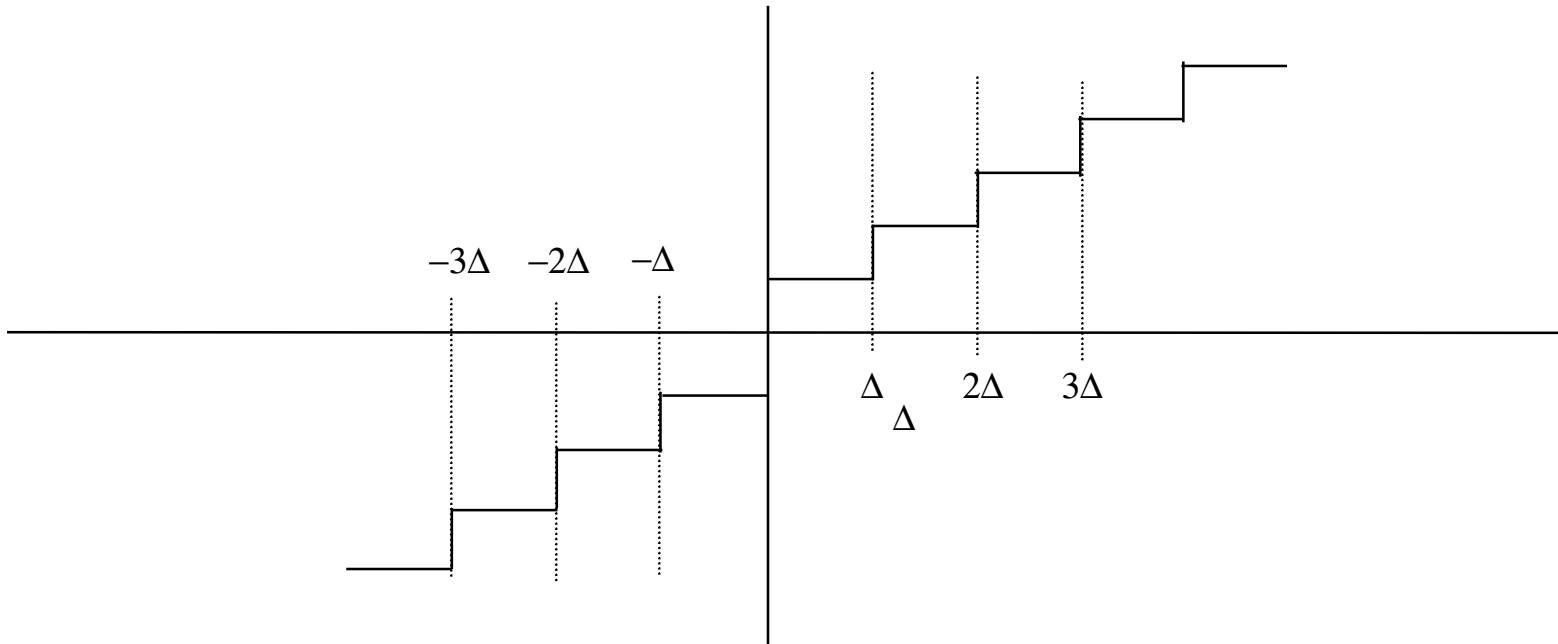
- El muestreo facilita una representación en tiempo discreto de una forma de onda continua
 - Los puntos de muestreo son números con valores reales
 - Para transmitir en un sistema digital debemos primero convertir en números con valor discreto



¿Qué son las regiones de cuantificación?

¿Qué son los niveles de cuantificación?

Cuantificador uniforme



- **Todas las regiones de cuantificación tienen el mismo tamaño (Δ)**
 - Salvo la primera y última región si las muestras no son finitas
- **Con N regiones de cuantificación, utilice $\log_2(N)$ bits para representar los valores cuantificados**

Error de cuantificación

$$e(x) = Q(x) - x$$

$$\text{Error cuadrático: } D = E[e(x)^2] = E[(Q(x)-x)^2]$$

$$\text{SQNR: } E[X^2]/E[(Q(x)-x)^2]$$

Ejemplo

- **X se distribuye uniformemente entre -A y A**
 - $f(x) = 1/2A$, $-A \leq x \leq A$ y 0 de otro modo
- **Cuantificación uniforme con N niveles $\Rightarrow \Delta = 2A/N$**
 - $Q(x)$ = nivel de cuantificación = punto medio de la región de cuantificación en la que está x
- **D = E[e(x)²] es igual para regiones de cuantificación**

$$D = E[e(x)^2 | x \in R_i] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2 f(x) dx = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2 dx = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$E[X] = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A x^2 dx = \frac{A^2}{3}$$

$$SQNR = \frac{A^2/3}{\Delta^2/12} = \frac{A^2/3}{(2A/N)^2/12} = N^2, (\Delta = 2A/N)$$

Diseño de cuantificador

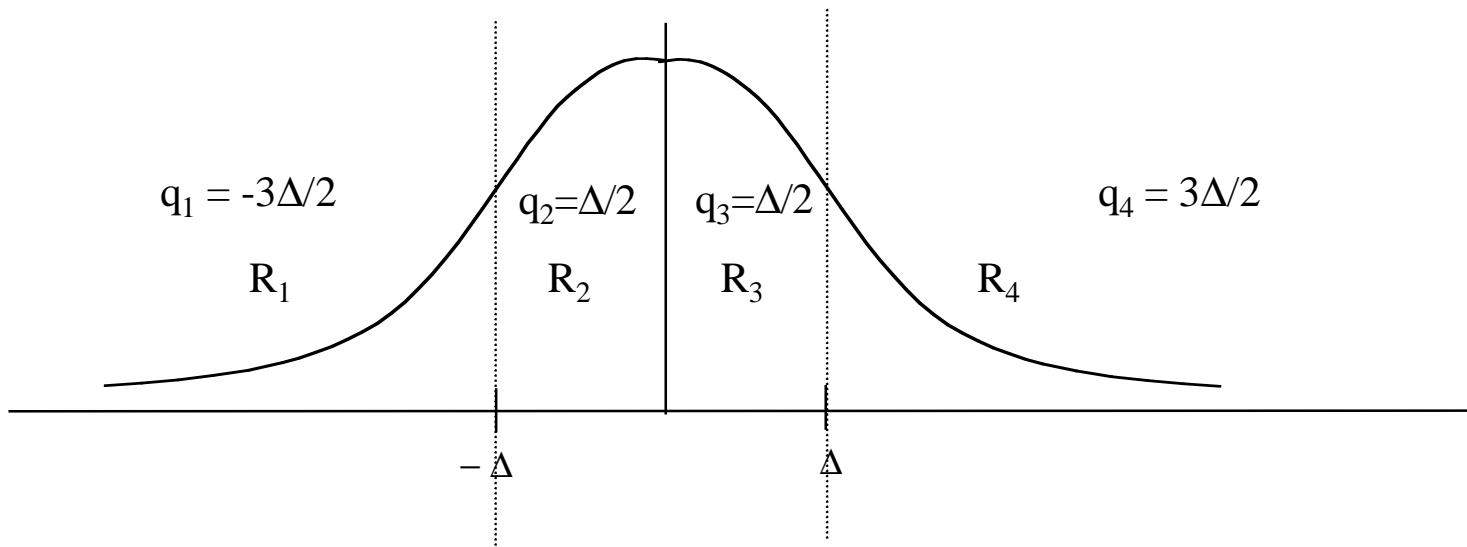
- El cuantificador uniforme da buen resultado cuando la entrada se distribuye uniformemente
- Si la entrada no se distribuye uniformemente:
 - Regiones de cuantificación no uniformes
Regiones mejores en torno a valores más probables
 - Los valores óptimos de cuantificación no son necesariamente los puntos medios de la región
- Métodos
 - Utilizar el cuantificador uniforme de todos modos
Elección óptima de Δ
 - Utilizar el cuantificador no uniforme
Elección de regiones y valores de cuantificación
 - Transformar la señal en una que parezca uniforme y utilizar el cuantificador uniforme

Cuantificador uniforme óptimo

- **Dado el número de regiones, N**
 - Hallar el valor óptimo de Δ
 - Hallar los valores de cuantificación óptima para cada región
 - Optimización por encima de $N+2$ variables
- **Simplificación: sean los niveles de cuantificación el punto medio de las regiones de cuantificación (salvo la primera y la última, si la entrada no es un valor finito)**
- **Resolver para Δ a fin de minimizar la distorsión**
 - La solución depende de la pdf de entrada y se puede realizar numéricamente para las pdfs más utilizadas (p.ej., pdf gaussiana, tabla 6.2, pág. 296 del texto)

Ejemplo de cuantificador uniforme

- **N=4, $X \sim N(0,1)$** $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}, \sigma^2 = 1$
- **De la tabla 6.2, $\Delta = 0,9957, D = 0,1188, H(Q) = 1,904$**
 - Observe que $H(Q)$ = la entropía de la fuente cuantificada es < 2
 - Se pueden utilizar dos *bits* para representar 4_{Δ} niveles de cuantificación
 - Pronto sabremos que sólo se necesitan $H(Q)$ *bits*



Cuantificador no uniforme

- Las regiones cuantificadas no han de ser de la misma longitud
- Los niveles de cuantificación no tienen que estar en los puntos medios
- Optimización compleja por encima de $2N$ variables
- Método:
 - Dadas las regiones cuantificadas, ¿cuáles deberían ser los niveles de cuantificación?
 - ¿Cuáles deberían ser las regiones cuantificadas?
- Resolver primero los niveles de cuantificación (dada una region (a_{i-1}, a_i))
 - Minimizar la distorsión

Niveles de cuantificación óptimos

- **Minimizar distorsión, D**

- El valor óptimo afecta a la distorsión únicamente en su región

$$D_R = \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x - x_i) f_x(x) dx$$

$$\frac{dD_R}{dx_i} = \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2(x - x_i)^2 f_x(x) dx = 0$$

$$x_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} x f_x(x | a_{i-1} \leq x \leq a_i) dx$$

-

$$x_i = E[X | a_{i-1} \leq x \leq a_i]$$

- **Los valores de cuantificación deberían ser el “centroide” de sus regiones**
 - El valor condicional esperado de dicha región
- **Se puede utilizar un procedimiento para hallar los valores óptimos de cuantificación también para el cuantificador uniforme**

Regiones de cuantificación óptima

- **Emplee la derivada de D con respecto a a_i**
 - **Utilice la derivada con respecto a las fronteras de enteros**

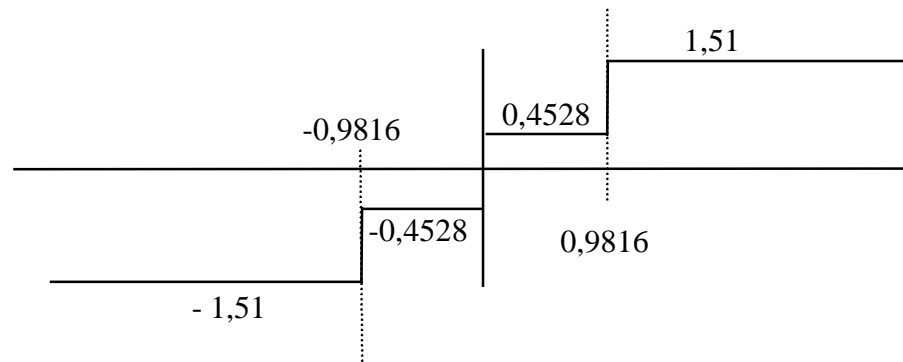
$$\frac{dD}{da_i} = f_x(a_i)[(a_i - x_i)^2 - (a_i - x_{i+1})^2] = 0$$

$$a_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- **Las fronteras de las regiones de cuantificación son el punto medio de los valores de cuantificación**
- **Condiciones de optimalidad:**
 1. **Los valores de cuantificación son el “centroide” de su región**
 2. **Las fronteras de las regiones de cuantificación son el punto medio de los valores de cuantificación**
 3. **Claramente 1 depende de 2 y viceversa. Los dos se pueden resolver iterativamente para obtener el cuantificador óptimo**

Hallar el cuantificador óptimo

- Comience con regiones arbitrarias (p. ej., uniforme Δ)
 - A) Hallar valores de cuantificación óptimos (“centroides”)
 - B) Utilizar valores de cuantificación para obtener regiones nuevas (“puntos medios”)
 - Repetir A y B hasta que se logre la convergencia
- Puede hacerse numéricamente para distribuciones conocidas
 - Tabla 6.3 (pág. 299) da un cuantificador óptimo para la fuente gaussiana
- E.g., $N=4$,
 - $D = 0,1175$, $H(x) = 1,911$
 - Recuerde: cuantificador uniforme, $D= 0,1188$, $H(x) = 1,904$ (ligera mejora)



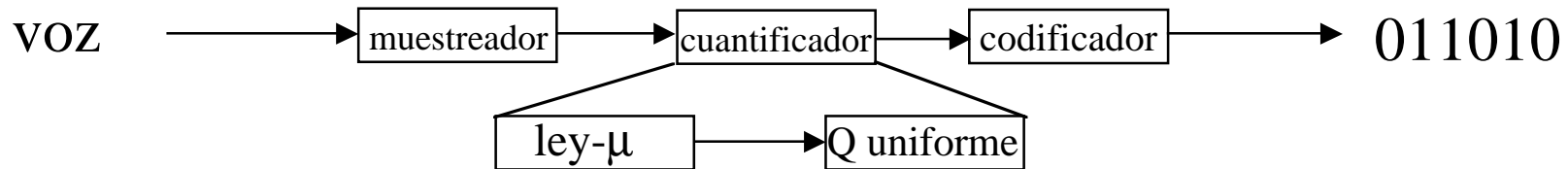
Compresor / Expansor

- **Un cuantificador no uniforme puede ser difícil de diseñar**
 - Requiere conocimiento de estadísticas de la fuente
 - Cuantificadores diferentes para diferentes tipos de entrada
- **Solución: trasladar la señal de entrada a una que asemeje uniforme y utilizar entonces el cuantificador uniforme**
- **Ley- μ para el compresor codificador**

$$g(x) = \frac{\text{Log}(1 + \mu |x|)}{\text{Log}(1 + \mu)} \text{sgn}(x)$$

- μ controla el nivel de compresión
- $\mu = 255$ típicamente utilizado para voz

Modulación PCM



- **PCM uniforme: $x(t) \in [X_{\min}, X_{\max}]$**
 - **$N = 2^v$ niveles de cuantificación, cada nivel codificado con v bits**
 - **SQNR: equivalente al cuantificador uniforme**

$$SQNR = \frac{E[X^2] \times 3 \times 4^v}{X_{MAX}^2}$$

- **Observe que aumentar el número de bits en 1 disminuye el SQNR en un factor de 4 (6 dB)**

Codificación del habla

- **PCM con $\mu = 255$**
- **Cuantificador uniforme con 128 niveles, $N = 2^7$, 7 bits por muestra**
- **El habla suele estar limitada a 4KHZ**
 - **Muestra a 8KHZ $\Rightarrow T_s = 1/8000 = 125 \mu s$**

8000 muestras por segundo a 7 bits por muestra $\Rightarrow 56$ Kbps
- **PCM diferencial**
 - **Las muestras de voz suelen ser correlacionadas**
 - **En lugar de codificar las muestras independientemente, codifique la diferencia entre muestras**
 - **Resultado: mejores prestaciones, velocidad de compresión menor**