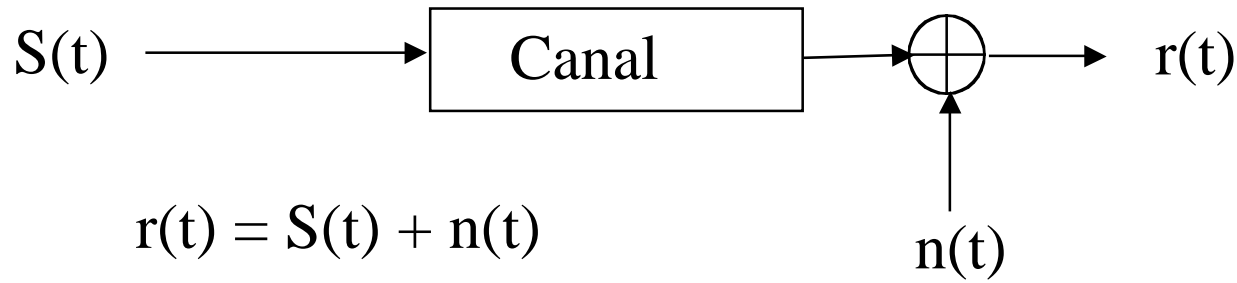

Clases 8 y 9: Detección de una señal con ruido

Eytan Modiano

Departamento de aeronáutica y astronáutica

Ruido en los sistemas de comunicación



- **El ruido es la señal adicional "no deseada" que interfiere con la señal transmitida**
 - Generada por dispositivos electrónicos
- **El ruido es un proceso aleatorio**
 - Cada "muestra" de $n(t)$ es una variable aleatoria
- **Generalmente, el proceso del ruido se considera "aditivo blanco gaussiano" (AWGN)**
 - Blanco: espectro de frecuencia plano
 - Gaussiano: distribución del ruido

Procesos aleatorios

- La autocorrelación de un proceso aleatorio $x(t)$ se define como
 - $R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$
- Un proceso aleatorio es estacionario en sentido amplio (WSS) si su media y autocorrelación son invariables en el tiempo. Esto es
 - $m_x(t) = E[x(t)] = m$
 - $R_{xx}(t_1, t_2) = R_x(\tau)$, donde $\tau = t_1 - t_2$
- Si $x(t)$ es WSS entonces:
 - $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
 - $|R_x(\tau)| \leq |R_x(0)|$ (el máximo se logra en $\tau = 0$)
- El contenido de potencia de un proceso WSS es:

$$P_x = E\left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt\right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_x(0) dt = R_x(0)$$

Espectro de potencia de un proceso aleatorio

- Si $x(t)$ es WSS entonces la densidad espectral viene dada por:

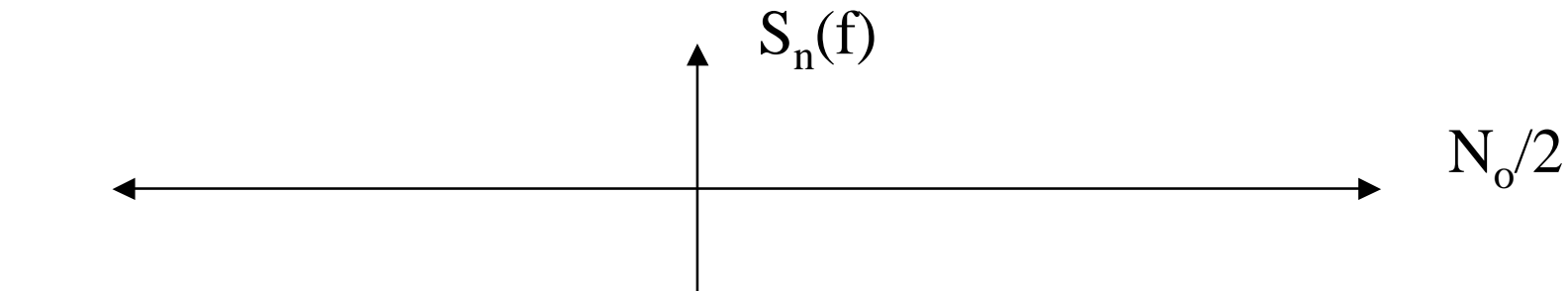
$$S_x(f) = F[R_x(\tau)]$$

- La potencia total en el proceso tambien viene dada por:

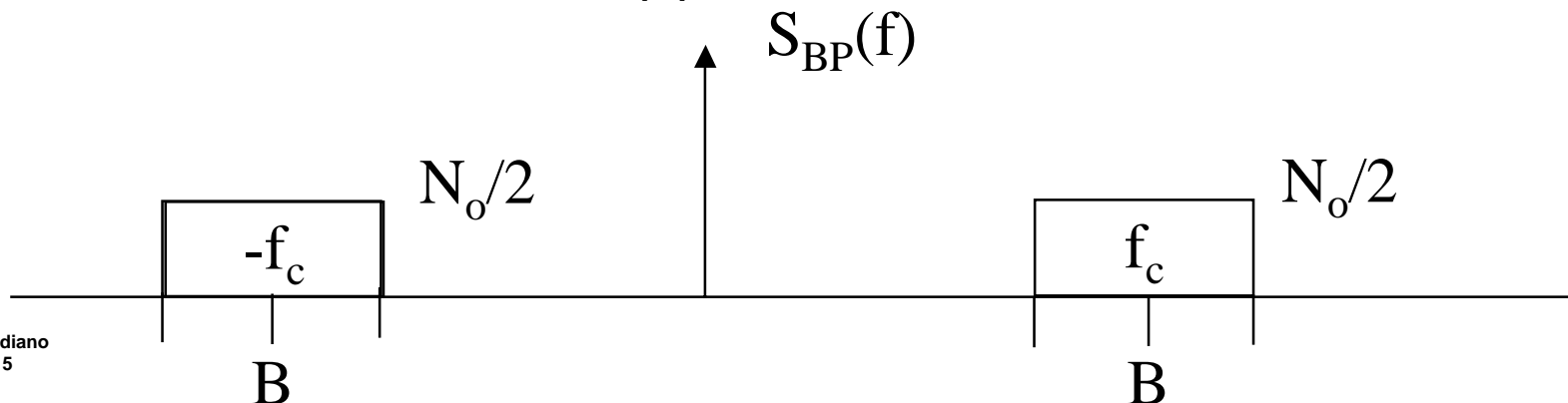
$$\begin{aligned} P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-j2\pi ft} df \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} df \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) \delta(t) dt = R_x(0) \end{aligned}$$

Ruido blanco

- El espectro de ruido es plano en todas las frecuencias relevantes
 - La luz blanca contiene todas las frecuencias



- Observe que la potencia total en el rango completo de la frecuencia es infinita
 - Pero en la práctica sólo nos importa el contenido de ruido en el ancho de banda de la señal, ya que el resto se puede filtrar
- Tras filtrar, la única potencia de ruido que permanece es la que contiene el ancho de banda del filtro (B)



AWGN

- El contenido efectivo de ruido del ruido pasabanda es BN_o
 - Las medidas experimentales muestran que el pdf de las muestras de ruido puede modelarse como variable aleatoria gaussiana de promedio cero

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

- AKA Normal r.v., $N(0, \sigma^2)$
 - $\sigma^2 = P_x = BN_o$
- El CDF de un R.V. gaussiano,

$$F_x(\alpha) = P[X \leq \alpha] = \int_{-\infty}^{\alpha} f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

- Esta integral requiere evaluación numérica
 - Disponible en tablas

AWGN, (cont.)

- $X(t) \sim N(0, \sigma^2)$
- $X(t_1), X(t_2)$ son independientes salvo que $t_1 = t_2$

-

$$R_x(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)] = \begin{cases} E[X(t + \tau)]E[X(t)] & \tau \neq 0 \\ E[X^2(t)] & \tau = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \tau \neq 0 \\ \sigma^2 & \tau = 0 \end{cases}$$

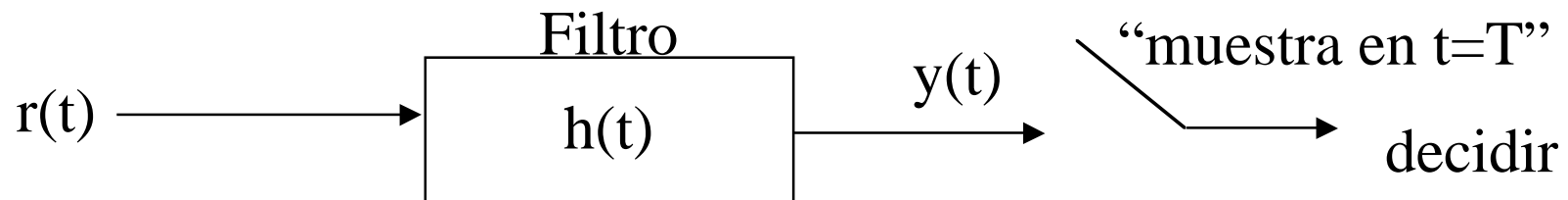
- $R_x(0) = \sigma^2 = P_x = BN_o$

Detección de señales en AWGN

Observe: $r(t) = S(t) + n(t)$, $t \in [0, T]$

Decida cuáles de entre S_1, \dots, S_m se enviaron

- **Filtro receptor**
 - Diseñado para maximizar la relación de potencia señal a ruido (SNR)



- **Objetivo: hallar el $h(t)$ que maximizó SNR**

Filtro receptor

$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$\text{Muestreo en } t = T \Rightarrow y(T) = \int_0^T r(\tau)h(T - \tau)d\tau$$

$$r(\tau) = s(\tau) + n(\tau) \Rightarrow$$

$$y(T) = \int_0^T s(\tau)h(T - \tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)h(T - \tau)d\tau = Y_s(T) + Y_n(T)$$

$$SNR = \frac{Y_s^2(T)}{E[Y_n^2(T)]} = \frac{\left[\int_0^T s(\tau)h(T - \tau)d\tau \right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T - t)dt} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau)s(T - \tau)d\tau \right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T - t)dt}$$

Filtro adaptado: maximiza SNR

Desigualdad Cauchy - Schwartz :

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} (g_1(t))^2 \int_{-\infty}^{\infty} (g_2(t))^2$$

Lo anterior cabe para la igualdad si, y sólo si: $g_1(t) = c g_2(t)$ para una constante arbitraria c

$$SNR = \frac{\left[\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau \right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt} \leq \frac{\int_0^T (s(\tau))^2 d\tau \int_0^T h^2(T-\tau)d\tau}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt} = \frac{2}{N_0} \int_0^T (s(\tau))^2 d\tau = \frac{2E_s}{N_0}$$

El máximo anterior se obtiene si, y sólo si: $h(T-\tau) = cS(\tau)$

$$\Rightarrow h(t) = cS(T-t) = S(T-t)$$

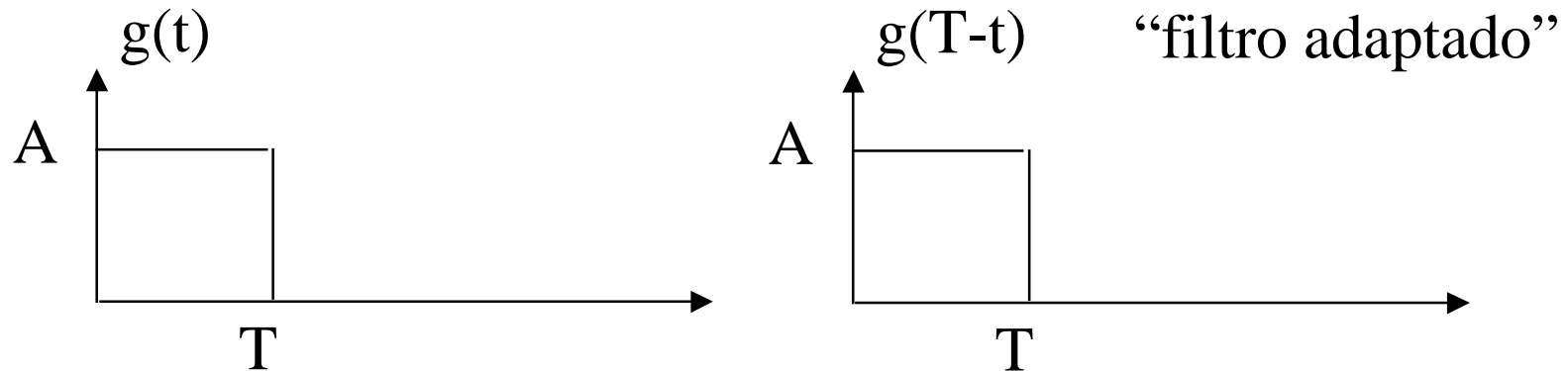
$h(t)$ se dice que está “ajustado” a la señal $S(t)$

Ejemplo: PAM

$$S_m(t) = A_m g(t), \quad t \in [0, T]$$

A_m es una constante: Binaria PAM $A_m \in \{0, 1\}$

El filtro adaptado se ajusta a $g(t)$



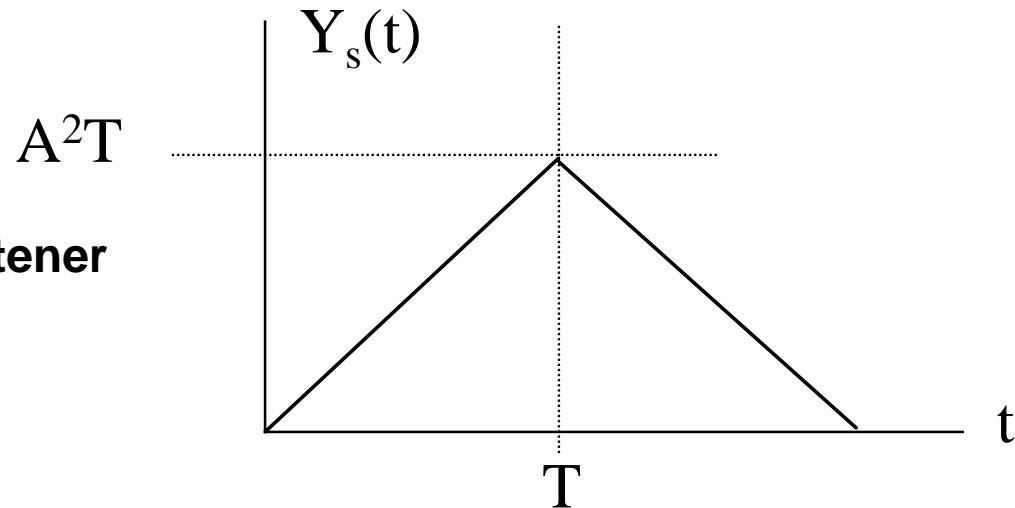
Ejemplo, continuación

$$Y_s(t) = \int_0^t S(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad h(t) = g(T-t) \Rightarrow h(t-\tau) = g(T+\tau-t)$$

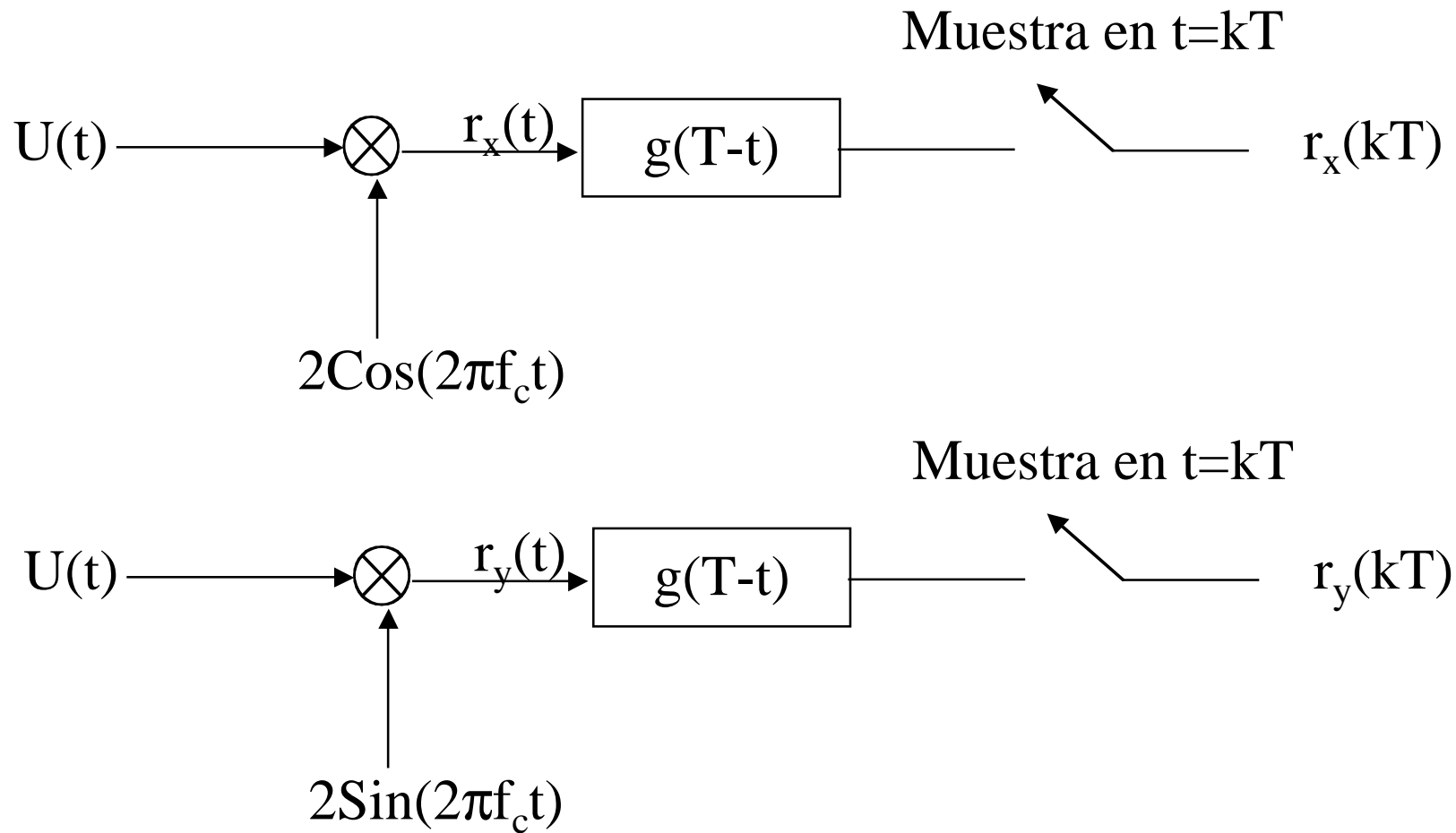
$$Y_s(t) = \int_0^t g(\tau)g(T+\tau-t)d\tau = \int_0^t g(\tau)g(T-t+\tau)d\tau$$

$$Y_s(T) = \int_0^T g^2(\tau)d\tau$$

- Muestra en $t=T$ para obtener el máximo valor



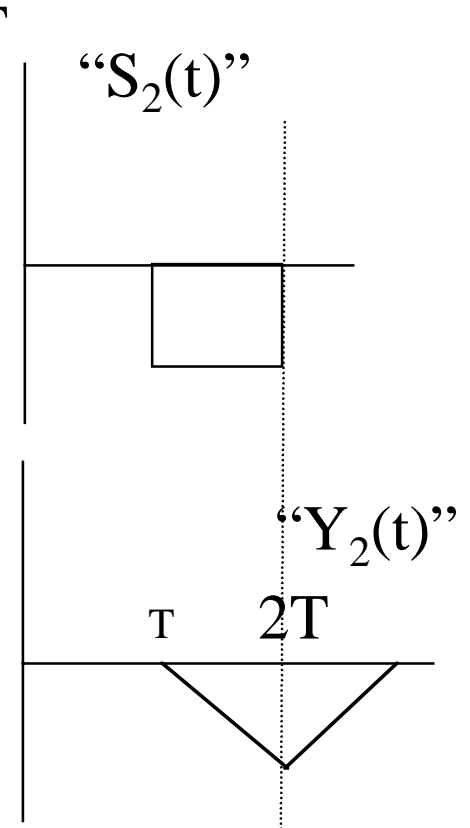
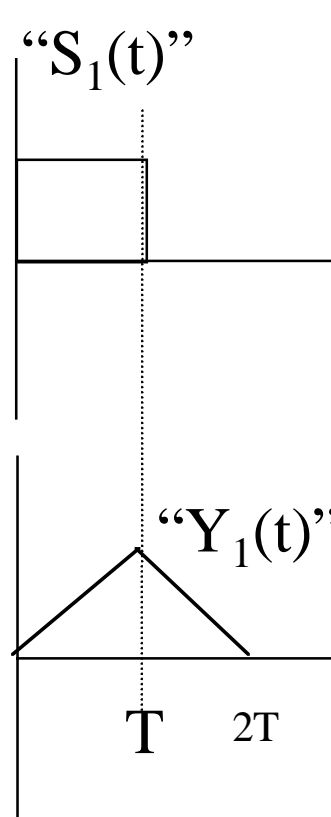
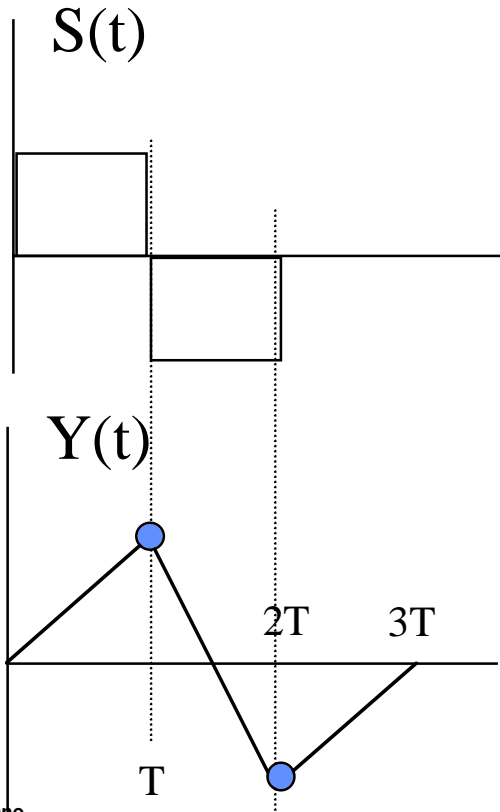
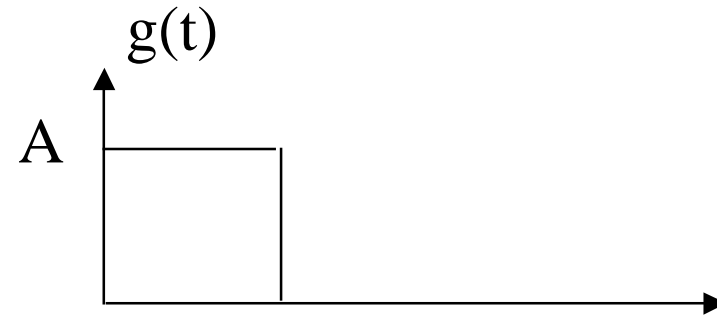
Receptor de filtro adaptado



Ejemplo PAM binario, (cont.)

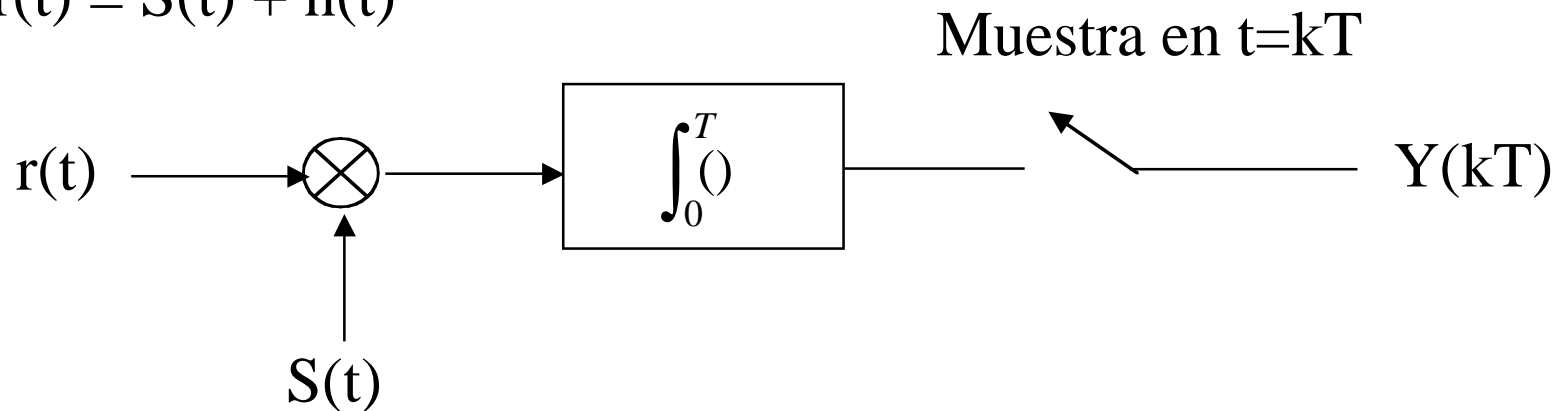
$$0 \Rightarrow S_1 = g(t)$$

$$1 \Rightarrow S_2 = -g(t)$$



Implementación alternativa: receptor correlacionado

$$r(t) = S(t) + n(t)$$



$$Y(T) = \int_0^T r(t)S(t) = \int_0^T S^2(t) + \int_0^T n(t)S(t) = Y_s(T) + Y_n(T)$$

Observe el parecido con el filtro adaptado

Deteción de señales

- **Tras el filtro adaptado recibimos $r = S_m + n$**
 - $S_m \in \{S_1, \dots, S_M\}$
- **¿Cómo determinamos a partir de r cuál de los M símbolos posibles se envió?**
 - Sin presencia de ruido recibiríamos lo que enviamos, pero el ruido puede transformar un símbolo en otro

Prueba de hipótesis

- **Objetivo: minimizar la probabilidad de un error de decisión**
- **Regla de decisión:**
 - **Escoja S_m de modo que $P(S_m \text{ enviado} | r \text{ recibido})$ se maximice**
- **Es el modelo clásico de Máximo a Posteriori (MAP)**
- **Regla MAP: maximizar la probabilidad condicional de que S_m se enviase dado que se recibió r**

Detector de MAP

MAP detector : $\max_{S_1 \dots S_M} P(S_m | r)$

$$P(S_m | r) = \frac{P(S_m, r)}{P(r)} = \frac{P(r | S_m)P(S_m)}{P(r)}$$

$$P(S_m | r) = \frac{f_{r|s}(r | S_m)P(S_m)}{f_r(r)}$$

$$f_r(r) = \sum_{m=1}^M f_{r|s}(r | S_m)P(S_m)$$

Cuando $P(S_m) = \frac{1}{M}$ la regla Map se convierte en:

$$\max_{S_1 \dots S_M} f(r | S_m) \text{ (o la regla de decisión de la Máxima Verosimilitud (ML))}$$

- **Notas:**

- La regla MAP requiere probabilidades anteriores
- MAP minimiza la probabilidad de un error de decisión
- La regla ML supone símbolos con iguales probabilidades
- Con símbolos con iguales probabilidades MAP y ML son iguales

Detección en AWGN (constelaciones unidimensionales)

$$f(r | S_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - S_m)^2 / N_0}$$

$$\ln(f(r | S_m)) = -\ln(\sqrt{\pi N_0}) - \frac{(r - S_m)^2}{N_0}$$

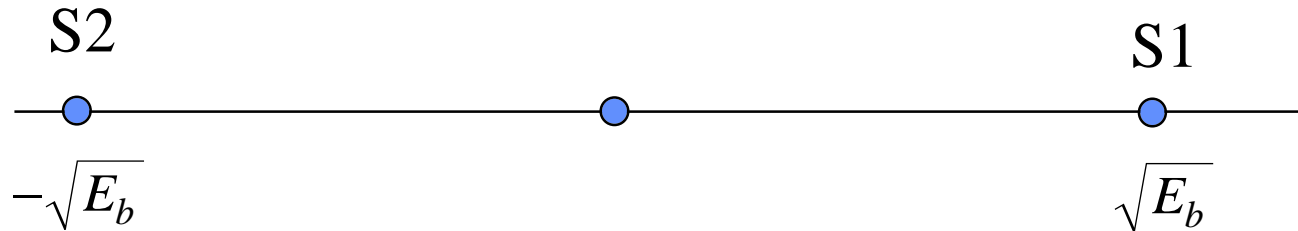
$$d_{rS_m} = (r - S_m)^2$$

La decodificación de máxima verosimilitud equivale a minimizar $d_{rS_m} = (r - S_m)^2$

- **También conocida como decodificación de distancia mínima**
 - **Expresión similar para constelaciones multidimensionales**

Detección de PAM binario

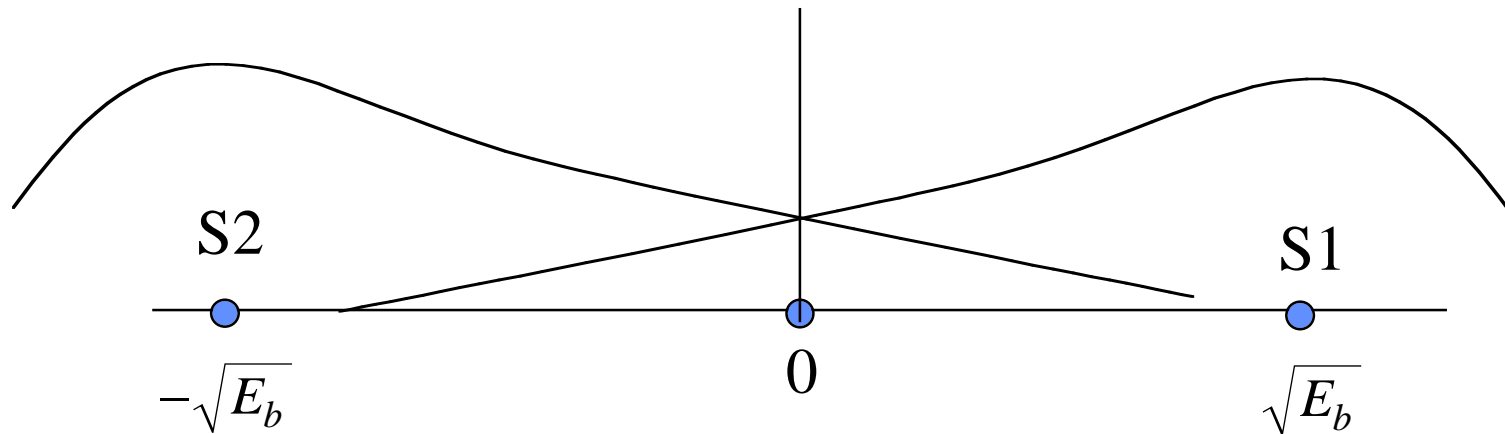
- $S1(t) = g(t)$, $S2(t) = -g(t)$
 - $S1 = -S2 \Rightarrow$ señalización “opuesta”
- Las señales opuestas con energía E_b pueden representarse geoméricamente como



- Si se envió $S1$, entonces la señal recibida $r = S1 + n$
- Si se envió $S2$ entonces la señal recibida $r = S2 + n$

$$f_{r|s}(r | s1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - \sqrt{E_b})^2 / N_0}$$
$$f_{r|s}(r | s2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r + \sqrt{E_b})^2 / N_0}$$

Detección de PAM binario



- **Regla de decisión: MLE => decodificación de distancia mínima**
 - => $r > 0$ decide enviar S1
 - => $r < 0$ decide enviar S2
- **Probabilidad de error**
 - Cuando se envía S2 la probabilidad de error es la probabilidad de que el ruido exceda $(E_b)^{1/2}$, del mismo modo cuando se envía S1 la probabilidad de error es la probabilidad de que el ruido exceda $-(E_b)^{1/2}$
 - $P(e|S1) = P(e|S2) = P[r < 0 | S1]$

Probabilidad de error para PAM binario

$$\begin{aligned} P_e &= \int_{-\infty}^0 f_{r|s}(r | s1) dr = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - \sqrt{E_b})^2 / N_0} dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{E_b}} e^{-r^2 / N_0} dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2E_b / N_0}} e^{-r^2 / 2} dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_b / N_0}}^{\infty} e^{-r^2 / 2} dr \\ &\equiv Q(\sqrt{2E_b / N_0}) \text{ donde,} \end{aligned}$$

$$Q(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-r^2 / 2} dr$$

- $Q(x) = P(X > x)$ para X gaussiano con media cero y $\sigma^2 = 1$
- $Q(x)$ requiere evaluación numérica y se tabula en muchos manuales matemáticos (Tabla 4.1 del libro de texto)

Más sobre la función Q

- **Notas sobre Q(x)**
 - $Q(0) = 1/2$
 - $Q(-x) = 1-Q(x)$
 - $Q(\infty) = 0, Q(-\infty)=1$
 - Si X es $N(m, \sigma^2)$ Entonces $P(X > x) = Q((x-m)/\sigma)$
- **Ejemplo: $P_e = P[r < 0 | S1 \text{ fue enviado}]$**

$$f_{r|s}(r | s1) \sim N(\sqrt{E_b}, N_0 / 2) \Rightarrow m = \sqrt{E_b}, \sigma = \sqrt{N_0 / 2}$$

$$P_e = 1 - P[r > 0 | s1] = 1 - Q\left(\frac{-\sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0 / 2}}\right) = 1 - Q(-\sqrt{2E_b / N_0}) = Q(\sqrt{2E_b / N_0})$$

Análisis de error (cont.)

- En general, la probabilidad de error entre dos símbolos separados por una distancia d viene dada por:

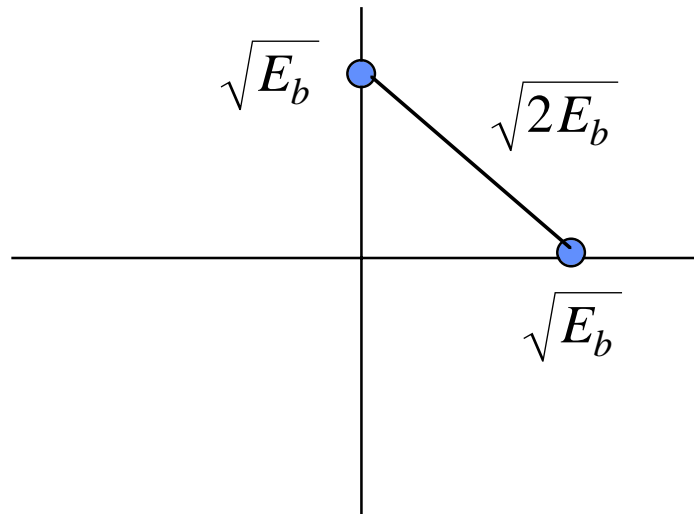
$$P_e(d) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

- Para PAM binario $d = 2\sqrt{E_b}$. De ahí,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Señales ortogonales

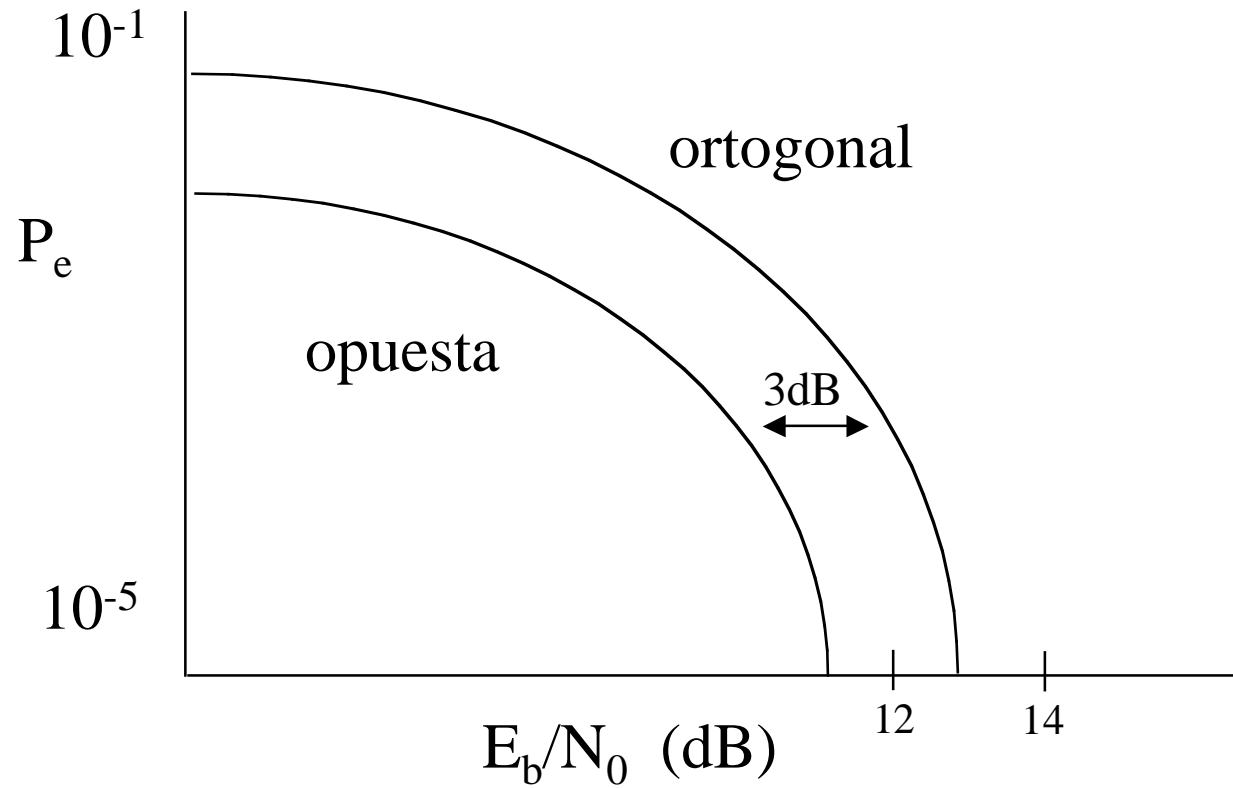
- Representación de señalización ortogonal (bidimensional)



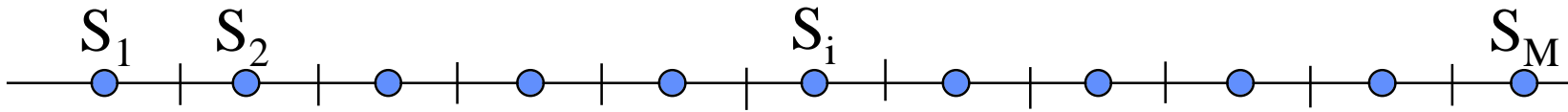
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q(\sqrt{E_b / N_0})$$

Señales ortogonales frente a opuestas

- Observe a partir de la función Q que la señalización ortogonal requiere el doble de energía en bits que la opuesta para la misma tasa de error
 - Esto se debe a la distancia entre puntos de señal



Probabilidad de error para M-PAM



$$S_M = A_M \sqrt{E_g}, \quad A_M = (2m - 1 - M) \tau_i$$

$$d_{ij} = 2\sqrt{E_g} \text{ for } |i - j| = 1$$

Regla de decisión: elegir s_i de forma que $d(r, s_i)$ se maximiza

$$P[\text{error} | s_i] = P[\text{decode } s_{i-1} | s_i] + P[\text{decode } s_{i+1} | s_i] = 2P[\text{decode } s_{i+1} | s_i]$$

$$Pe = 2Q\left[\sqrt{\frac{d_{i,i+1}^2}{2N_0}}\right] = 2Q\left[\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right], \quad P_{eb} = \frac{Pe}{\text{Log}_2(M)}$$

Notas:

- 1) La probabilidad de error para s_1 y s_M es menor porque el error sólo ocurre en una dirección
- 2) Con la codificación Gray la tasa de error de bit es $P_e / \log_2(M)$

Probabilidad de error para M-PAM

$$E_{av} = \frac{M^2 - 1}{3} E_g \Rightarrow E_{bav} = \frac{M^2 - 1}{3 \text{Log}_2(M)} E_g$$

$$E_g = \frac{3 \text{Log}_2(M)}{M^2 - 1} E_{bav}$$

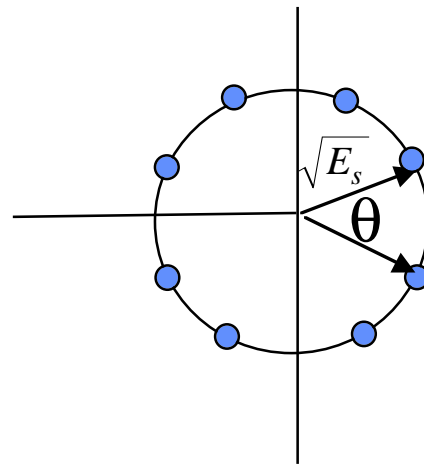
$$P_e = 2Q \left[\sqrt{\frac{6 \text{Log}_2(M)}{(M^2 - 1) N_0} E_{bav}} \right], \quad P_{eb} = \frac{P_e}{\text{Log}_2(M)}$$

si nos fijamos en el efecto de S_1 y S_M obtenemos:

$$P_e = 2 \left(\frac{M-1}{M} \right) Q \left[\sqrt{\frac{6 \text{Log}_2(M)}{(M^2 - 1) N_0} E_{bav}} \right],$$

Probabilidad de error para PSK

- El PSK binario es exactamente igual que el PAM binario
- 4-PSK puede contemplarse como dos conjuntos de señales PAM binarias
- Para un valor M grande (p. ej., $M > 8$) una buena aproximación supone que se dan errores entre puntos de señal adyacentes



$$\theta = 2\pi/M$$

$$d_{ij} = 2\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right), \quad |i - j| = 1$$

Probabilidad de error para PSK

$$P[\text{error} | s_i] = P[\text{decode } s_{i-1} | s_i] + P[\text{decode } s_{i+1} | s_i] = 2P[\text{decode } s_{i+1} | s_i]$$

$$P_{es} = 2Q\left[\sqrt{\frac{d_{i,i+1}^2}{2N_0}}\right] = 2Q\left[\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin(\pi / M)\right]$$

$$E_b = E_s / \text{Log}_2(M)$$

$$P_{es} = 2Q\left[\sqrt{\frac{2\text{Log}_2(M)E_b}{N_0}} \sin(\pi / M)\right], \quad P_{eb} = \frac{P_{es}}{\text{Log}_2(M)}$$