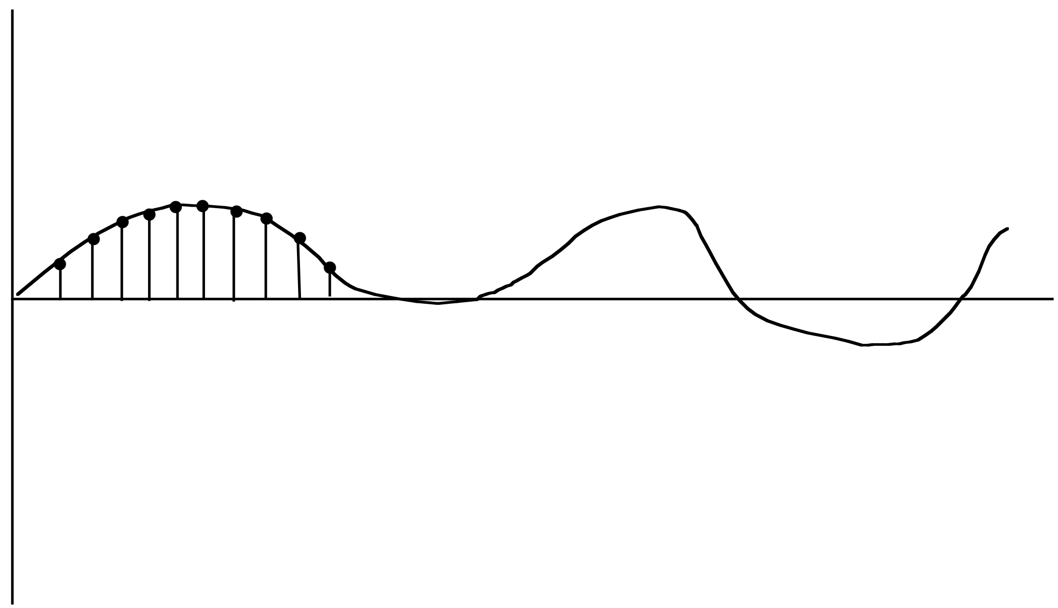
Clase 3: Teorema del muestreo

Eytan Modiano
AA Dept.

Muestreo

- **Dada una forma de onda continua, ¿podemos representarla utilizando muestras discretas?**
  - **¿Con qué frecuencia hay que muestrear?**
  - **¿Podemos reproducir la forma de onda original?**



La transformada de Fourier

- **Representación de señales en el dominio de frecuencia**

- **Definición:** $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- **Anotación:**

X(f) = F[x(t)]
X(t) = F-1 [X(f)]
x(t) ↔ X(f)

Impulso unitario δ(t)

$$\delta(t) = 0, \forall t \neq 0$$

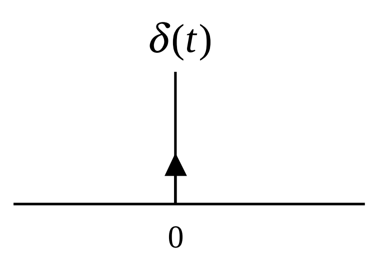
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

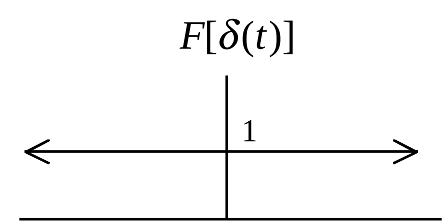
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t) = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) x(\tau) = x(t)$$

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{0} = 1$$

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$



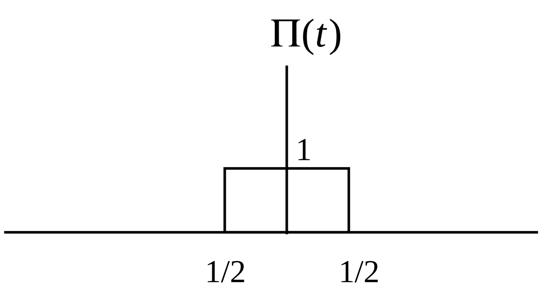


Impulso de forma rectangular

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 1/2 & |t| = 1/2 \\ 0 & de\ otro\ modo \end{cases}$$

$$F[\Pi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \frac{e^{-j\pi t} - e^{j\pi f}}{-j2\pi f} = \frac{Sin(\pi f)}{\pi f} = Sinc(f)$$



Propiedades de la transformada de Fourier

- **Linealidad**
  - **x1(t) <=> X1(f), x2(t) <=>X2(f) => αx1(t) + βx2(t) <=> αX1(f) + βX2(f)**
- **Dualidad**
  - **X(f) <=> x(t) => x(f) <=> X(-t) y x(-f)<=> X(t)**
- **Desplazamiento temporal: x(t-τ) <=> X(f)$e^{-j2\pi f\tau}$**
- **Escalado: F[(x(at)] = 1/|a| X(f/a)**
- **Convolución: x(t) <=> X(f), y(t) <=> Y(f) entonces,**
  - **F[x(t)*y(t)] = X(f)Y(f)**
  - **La convolución temporal corresponde a la multiplicación en frecuencia y viceversa**

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau$$

Propiedades de la transformada de Fourier (Modulación)

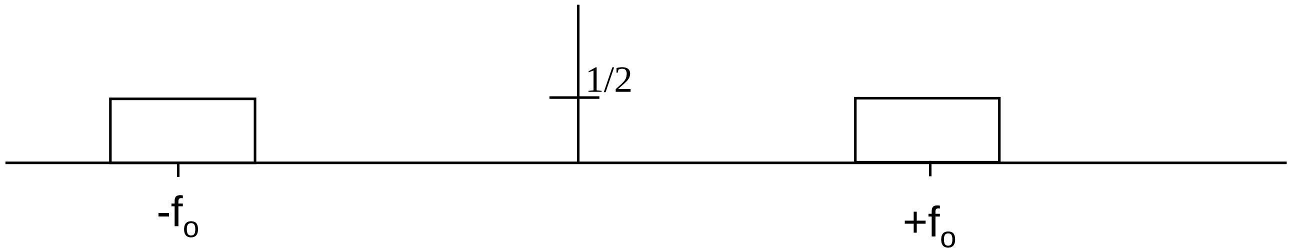
$$x(t)e^{j2\pi f_o t} \Leftrightarrow X(f - f_o)$$

$$\text{ahora, } \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$x(t)\cos(2\pi f_o t) = \frac{x(t)e^{j2\pi f_o t} + x(t)e^{-j2\pi f_o t}}{2}$$

$$\textit{de ahí, } x(t)\cos(2\pi f_o t) \Leftrightarrow \frac{X(f - f_o) + X(f + f_o)}{2}$$

- **Ejemplo: x(t)= sinc(t), F[sinc(t)] = Π(f)**
- **Y(t) = sinc(t)cos(2$\pi$$f_o$t) <=> ($\Pi$(f-$f_o$)+$\Pi$(f+$f_o$))/2**



Más propiedades

- **Contenido de potencia de la señal** $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

- **Autocorrelación**

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t-\tau) dt$$

$$R_x(\tau) \Leftrightarrow |X(f)|^2$$

- **Muestreo**

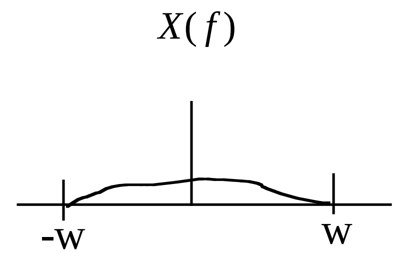
$$x(t_o) = x(t)\delta(t-t_o)$$

$$x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_o) = \text{versión muestreada de x(t)}$$

$$F[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_o)] = \frac{1}{t_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{t_o})]$$

El teorema del muestreo

- **Señal limitada por banda** $X(f) = 0,\ para\ todo\ f, |f| \geq W$
  - **Ancho de banda < W**



Teorema del muestreo: si muestreamos la señal a intervalos Ts donde Ts <= 1/ 2W, entonces la señal se puede reconstruir por completo a partir de sus muestreos utilizando la fórmula

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2W' T_s x(nT_s) \sin c[2W'(t - nT_s)]$$

$$donde, \qquad W \leq W' \leq \frac{1}{T_s} - W$$

$$con\ T_s = \frac{1}{2W} \Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \sin c[(\frac{t}{T_s} - n)]$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\frac{n}{2W}) \sin c[2W(t - \frac{n}{2W})]$$

Demostración

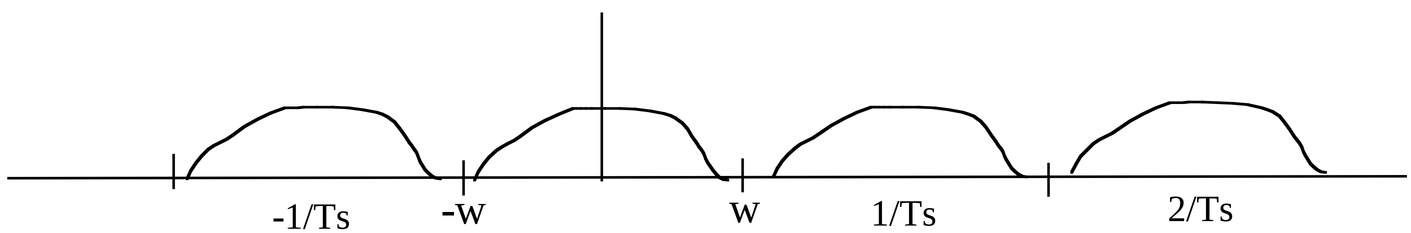
$$x_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)$$

$$X_\delta(f) = X(f) * F[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)]$$

$$F[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)] = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{n}{T_s})$$

$$X_\delta(f) = \frac{1}{Ts}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(f - \frac{n}{T_s})$$

- **La transformada de Fourier de la señal muestreada es una réplica de la transformada del original separada por intervalos 1/Ts**



Demostración (cont.)

- **Si 1/Ts > 2W entonces las réplicas de X(f) no se solaparán y se podrán recuperar**

- **¿Cómo podemos reconstruir la señal original?**
  - **Realice un filtro de paso bajo (LPF) de la señal muestreada**

- **El filtro de paso bajo ideal es un impulso rectangular** $H(f) = T_s \Pi(\frac{f}{2W})$

- **Ahora, la señal recuperada tras realizar el filtro de paso bajo**

$$X(f) = X_\delta(f) T_s \Pi(\frac{f}{2W})$$

$$x(t) = F^{-1}[X_\delta(f) T_s \Pi(\frac{f}{2W})]$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) Sinc(\frac{t}{T_s} - n)$$

Notas sobre el teorema de muestreo

- Si se muestrea a velocidad 2W, el filtro de reconstrucción ha de ser un impulso de forma rectangular
  - Un filtro así no es realizable
  - Para la reconstrucción perfecta debe observar muestreos en el futuro y el pasado infinitos

- En la práctica podemos muestrear a una velocidad superior a 2W, con lo que se consiguen filtros de reconstrucción que son más fáciles de realizar

- Dado un conjunto de puntos de muestreo arbitrarios que están separados 1/2W, se puede construir una señal continua con límite de banda W