18.06: soluciones a la hoja de problemas nº 1

1a) (2 puntos) Para que los dos vectores sean paralelos,
es necesario que (a, 4) = c(2, 5) para cierta constante *c*.
Por tanto, necesariamente a = 2c y 4 = c5. De esto se sigue que c = 4/5 y *a* = 8/5.

1b) (2 puntos) Buscamos aquellos valores de *a* para los cuales el producto escalar $(a, 2) \cdot (a, -2) = 0$. Dado que $(a, 2) \cdot (a, -2) = a^2 - 4$, obtenemos que $(a, 2) \cdot (a, -2) = 0$ cuando $a = 2$ y $a = -2$.

1c) (2 puntos) Calculamos:

$$||(1, a, -3, 2)|| = \sqrt{(1, a, -3, 2) \cdot (1, a, -3, 2)} = \sqrt{1 + a^2 + 9 + 4} = \sqrt{14 + a^2}.$$

De modo que $\|(1, a, -3, 2)\| = 5$ cuando $a = \sqrt{11}$.

2) (6 puntos) Al dibujar todos los vectores con su punto de partida en el origen, el punto medio de la diagonal $v + w$ queda en el punto final del vector $\frac{1}{2}(v + w)$, mientras que el punto medio de la diagonal $w - v$ se encuentra en $v + \frac{1}{2}(v - w)$. Pero:

$$v + \frac{1}{2}(w - v) = v + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}(v + w).$$

Por lo tanto, los puntos medios coinciden y las diagonales se cortan en su punto medio.

3a) (2 puntos) La ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ s \end{bmatrix}.$$

3b) (2 puntos) Mediante eliminación obtenemos la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 0 & t+8 & s+16 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema tendrá exactamente una solución para cualquier combinación de valores de t, s para la que $t + 8 \neq 0$ (esta condición permite que existan en total 2 pivotes).

3c) (2 puntos) Pongamos que $t = -8$ y s, cualquier otro valor distinto de -16. Así, obtenemos una ecuación de la forma $0 \cdot y = d$, donde $d = s + 16 \neq 0$, con lo cual no existen soluciones.

3d) (2 puntos) Tomando $t = -8$ y $s = -16$, obtenemos que $0 \cdot y = 0$, lo cual se cumple para cualquier valor de y. Por lo tanto, existen infinitas soluciones al sistema.

3e) (2 puntos) En (b) se produce una intersección de dos líneas en un punto exactamente. En (c), tenemos dos rectas paralelas que nunca se cortan. En (d), tenemos dos ecuaciones que dan como resultado la misma línea, por lo cual, un punto de una se halla automáticamente en la otra.

4) FALSO. Tomemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

mientras que:

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

5) (4 puntos) Tomemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$