Soluciones de la hoja de problemas de 18.06 # 2

1) La multiplicación matricial AB es posible si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Si A es de m por n y B es de n por k, entonces AB será de m por k. La suma de matrices $A + B$ es posible si ambas tienen la misma forma. Así, sabemos que BA, ABD y $ABABD$ están permitidas, y que sus formas son de 5 por 5, 3 por 1 y 3 por 1, respectivamente.

2) Asumiendo que la inversa de $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ DZ & DW \end{bmatrix}.$$

Así que tenemos la ecuaciones matriciales:

$AX + BZ = I, AY + BW = 0, DZ = 0, DW = I.$

Se resuelven para obtener $W = D^{-1}, Z = 0, X = A^{-1}, Y = -A^{-1}BD^{-1}$. De modo que:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

Las respuestas para las otras dos matrices son:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & -I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & -I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

3)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

La condición para que A tenga 4 pivotes es que $a \neq b \neq c \neq d$.

4) Para convertir a A en una matriz triangular superior mediante permutaciones, es necesario intercambiar las filas segunda y tercera. De este modo, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para convertir a A en triangular inferior por medio de la permutación de filas y columnas, es necesario poner la segunda fila en primer lugar, la tercera, en segundo y la primera, en tercero. A continuación se intercambian la primera y la última columnas. Así:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5) (a) Asumiendo que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -9 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ x & -1 & -1 \\ y & z & -1 \end{bmatrix},$$

tenemos que, puesto que:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ x & -1 & -1 \\ y & z & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3x & 0 & 0 \\ 8+5x+y & 1+z & 0 \\ -12-9x-y & -z & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos para obtener $x = -1$, $y = -3$, $z = 0$.

(b) Partiendo de $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$, tenemos que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.