18.06: hoja de problemas nº 3

Fecha de entrega: miércoles 13 de marzo.

Problema 1. (5 puntos).¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para:

(a) {(1,2,0), (0,1,-1)}

(b) {(1,1,-1), (2,3,4), (4,1,-1), (0,1,-1)}

(c) {(3,2,2), (-1,2,1), (0,1,0)}

(d) {(1,0,0), (0,2,-1), (3,4,1), (0,1,0)}?

Problema 2. (5 puntos).

(a) Sea M_2 el espacio vectorial de matrices 2 × 2. Indique si el siguiente conjunto es o no una base para M_2:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Halle una base para el subespacio de M_2 formado por matrices simétricas.

Problema 3. (8 puntos). Halle las dimensiones de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

(a) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d) con $d = a + b$.

(b) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d) con $c = a - b$ y $d = a + b$.

(c) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d) con $a = b$.

(d) Todos los vectores de la forma $(a + c, a - b, b + c, -a + b)$.

Problema 4. (6 puntos). Halle una base para cada uno de los cuatro subespacios asociados a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 5. (6 puntos) Supongamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$. Demuestre que, si A es una matriz invertible n x n, $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ es también una base para $\mathbb{R}^n$.