

18.06: soluciones a la hoja de problemas n°3

1. El conjunto del apartado (a) no puede ser una base, ya que dos vectores pueden abarcar como máximo un espacio vectorial bidimensional, y \mathbb{R}^3 es tridimensional. Tampoco pueden ser bases los conjuntos de los apartados (b) y (d), al no poder ser linealmente independientes. (Si los vectores son las columnas de una matriz, la matriz será de 3×4 , y tendrá un espacio nulo no trivial; y los vectores tendrán una relación de dependencia no trivial). Para el apartado (c), pondremos los vectores en una matriz y reduciremos filas.

Al ser la matriz invertible, las columnas de la matriz original forman una base. (A tiene un rango completo de columnas, por lo que estas abarcan \mathbb{R}^3 , y tiene también un espacio nulo trivial, siendo por tanto las columnas linealmente independientes).

2. Podemos deducir que el conjunto es una base demostrando que abarca M_2 y que es independiente linealmente. Indique los vectores m_1, m_2, m_3, m_4 de este conjunto.

Expansión: sea

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

cualquier vector en M_2 , y buscamos las constantes a, b, c, d , luego:

$$am_1 + bm_2 + cm_3 + dm_4 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a+c & a+d \\ b+d & b+c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Ello nos da un sistema de cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas a, b, c, d .
Obtenemos la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w \end{bmatrix}$$

Reduciendo filas, obtenemos una solución única:

$$a = x - w + z, \quad b = 2z - y + x - w, \quad c = w - z, \quad d = y - x + w - z.$$

De todo ello concluimos que el conjunto arriba expresado abarca M_2 .

Independencia lineal: supongamos que $am_1 + bm_2 + cm_3 + dm_4 = 0$, donde

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos el mismo sistema de ecuaciones visto anteriormente, con x, y, z y w iguales a cero. Pero como la matriz del coeficiente es de rango completo, el espacio nulo será el vector cero. De ello se desprende que $am_1 + bm_2 + cm_3 + dm_4 = 0$ solamente cuando $a = b = c = d = 0$. De donde concluimos que el conjunto es linealmente independiente.

3. (a) Tenemos $\{(a, b, c, a + b)\} = \text{expansión de } \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Dado que el último vector de este conjunto es una combinación lineal de los otros tres, podemos suprimirlo. El conjunto resultante es una base, luego la dimensión será igual a 3.
- (b) El conjunto $\{(a, b, a - b, a + b)\}$ es la expansión del conjunto linealmente independiente $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$. Por lo tanto, la dimensión será igual a 2.
- (c) El conjunto $\{(a, a, c, d)\}$ es la expansión del conjunto linealmente independiente $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Por tanto, la dimensión será igual a 3.
- (d) El conjunto $\{(a + c, a - b, b + c, -a + b)\}$ es la expansión del conjunto linealmente independiente $\{(0, -1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$. Por tanto, la dimensión será igual a 2.

4. De la reducción de filas A obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango es 2. La base correspondiente al espacio de filas se halla formada por las filas distintas de cero de la matriz escalonada, de donde se deduce que $\beta_{\text{fila}} = \{(0, 1, 2, 0, -2), (0, 0, 0, 1, 2)\}$. El espacio nulo tiene una dimensión $5 - 2 = 3$. Asignando un valor de cero o uno a las variables libres x_1, x_3, x_5 obtenemos nuestra base $\beta_{\text{nulo}} = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 0, 0), (0, 2, 0, -2, 1)\}$. La base del espacio de las columnas (que tiene una dimensión 2) viene dada por las columnas de la matriz original correspondientes a las columnas pivote de la matriz escalonada. Por lo tanto, $\beta_{\text{col}} = \{(1, 1, 0), (3, 4, 1)\}$. Por último, respecto del espacio nulo de la izquierda, $N(A^T)$, podemos aplicar el hecho de que $N(A^T)$ es el componente ortogonal del espacio de columnas en \mathbb{R}^3 . Se ve claramente que el espacio (unidimensional) de los vectores que es ortogonal al espacio de columnas de A tiene una base $\beta_{N(A^T)} = \{(1, -1, 1)\}$.

5. Vamos a demostrar que este conjunto abarca \mathbb{R}_n y que es linealmente independiente. Al ser A invertible, dado un vector \mathbf{b} en \mathbb{R}_n , habrá exactamente un vector \mathbf{x} en \mathbb{R}_n para el que se cumpla $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pero \mathbf{x} se puede expresar como una combinación lineal de los vectores base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Es decir, $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ para algunas constantes c_1, \dots, c_n . Entonces tendremos:

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = A(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1A\mathbf{v}_1 + \dots + c_nA\mathbf{v}_n.$$

Vemos que hemos expresado \mathbf{b} como una combinación lineal de los vectores $A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n$. Dado que \mathbf{b} era un vector arbitrario en \mathbb{R}_n , el conjunto $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n\}$ abarca \mathbb{R}_n . Supongamos ahora que tenemos las constantes d_1, \dots, d_n

de modo que $d_1A\mathbf{v}_1 + \dots + d_nA\mathbf{v}_n = 0$.

Luego:

$$0 = d_1 A \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n A \mathbf{v}_n = A(d_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n \mathbf{v}_n).$$

Al ser A invertible, su espacio nulo es trivial, por lo que concluimos que $d_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n \mathbf{v}_n = 0$. Pero el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente, por lo que debemos tener $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$. Lo que nos está indicando que si $d_1 A \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n A \mathbf{v}_n = 0$, todas las constantes son iguales a cero. Es decir, que el conjunto $\{A \mathbf{v}_1, \dots, A \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente. Al ser este conjunto un conjunto linealmente independiente que abarca \mathbb{R}^n , es una base.