

### 18.06: hoja de problemas n°4

Fecha de entrega: miércoles, 20 de marzo

- 1 Sin calcular  $A$ , halle una base (explicando sus respuestas) para cada uno de los cuatro subespacios asociados a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2 a) Supongamos que las columnas de  $A$  son vectores unitarios, todos ellos perpendiculares entre sí. Halle  $A^T A$ .  
b) Las matrices cuadradas que cumplen las condiciones del apartado anterior se denominan matrices ortogonales. Pruebe que:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal  $2 \times 2$  para cualquier número real  $\theta$ .

- c) Pruebe, mediante ejemplos contrarios, que el conjunto de matrices ortogonales  $2 \times 2$  no es un espacio vectorial.  
d) Demuestre que una matriz  $n \times n$   $A$  es ortogonal si, y solamente si,  $A^T = A^{-1}$ .

- 3 Llamemos  $S$  al espacio vectorial abarcado por los vectores  $(1,0,-2,0)$ ,  $(0,2,4,-1)$  y  $(2,2,0,-1)$ . Halle  $S^\perp$ ,  $(S^\perp)^\perp$ . ¿Qué relación existe entre  $(S^\perp)^\perp$  y  $S$ ?  
4 Halle una base para el subespacio vectorial  $S$ , que es la intersección de  $U$  y  $V$ , donde  $U$  es la extensión de  $\{(1,-2,0,3), (0,1,0,-1)\}$  y  $V$  es la extensión de  $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ .  
5 Halle la proyección de  $b$  sobre el espacio de columnas de  $A$  resolviendo  $A^T Ax = A^T b$ ; y  $p = A\hat{x}$

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 6 Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  de rango  $n$ . Supongamos que  $P$  es la matriz de proyección que se proyecta sobre el espacio de columnas de  $A$ . ¿Cuál es el tamaño de la matriz  $P$ ? ¿Y el rango? Explique por qué.