18.06: soluciones a la hoja de problemas nº4

1.$C(A^T)$: indica las matrices del problema como $A = UL$. El espacio de filas de A es el mismo que el de su matriz escalonada de filas U. Así pues, la base para $C(A^T)$ será {(0,1,2,3,4), (0,0,0,1,–1)}.

$N(A)$: dado que L es invertible, el espacio nulo de A es igual al espacio nulo de U. Si nos fijamos en U, vemos que las columnas 1, 3 y 5 dan cada una de ellas una variable libre. Por lo tanto, una base para $N(A)$ sería {(1,0,0,0,0), (0,–2,1,0,0), (0,–7,0,1,1)}.

$C(A)$: cada columna de A es una combinación de los vectores de columnas de L, cuyos coeficientes vienen dados por la columna de U correspondiente. Por ejemplo, la cuarta columna de A será la suma del triplo de la primera columna de L más la segunda columna de L. Pero la tercera fila de U es una fila de valor cero. Cuando expresamos los vectores de columna de A como combinaciones lineales de los vectores de columna de L, el coeficiente del vector de la tercera columna de L es siempre cero. Por consiguiente, para expresar cualquier columna de A basta con utilizar las dos primeras columnas de L. Asimismo, si tenemos en cuenta que el rango de A es dos, la base para $C(A)$ estaría formada por los vectores de las dos primeras columnas de L; es decir, {(1,–4,8), (0,1,3)}.

$N(A^T)$: es el complemento ortogonal de $C(A)$, luego su base sería {(–20,–3,1)}.

2. (a) Indicamos v_i como el vector de columna i-ésima de A, luego el elemento de A^TA en la fila i-ésima, columna j-ésima es el producto interno de v_i por v_j. $vi \times v_i = |v_i|^2 = 1$. $v_i \times v_j = 0$ cuando $i \neq j$, ya que v_i y v_j son ortogonales. De donde se deduce que $A^TA = I$ es la matriz de identidad.
(b) Basta con comprobar las condiciones.
(c) Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal; pero su duplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

no lo es, ya que el primer vector de columnas (2,0) tiene rango 2 y no es unitario.
(d) $A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A^TA = I$ y el argumento del apartado (a) es reversible.

3. $S^\perp$: ponemos los vectores que abarcan S como vectores de fila de una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A continuación aplicamos la forma escalonada de fila para hallar $S^\perp = C(A^T)^\perp = N(A)$ como extensión de {(2,–2,1,0), (0,1/2,0,1).

$(S^{\perp})^{\perp}$: $(S^{\perp})^{\perp}$ = espacio nulo de:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es la extensión de $\{(-1/2,0,1,0), (-2,-2,0,1)\}$.

$(S^{\perp})^{\perp} = S$: se trata de cálculo sencillo para expresar los vectores extendidos de S como combinaciones lineales de vectores base de $(S^{\perp})^{\perp}$, o viceversa. Los dos espacios vectoriales son idénticos. $(S^{\perp})^{\perp} = S$ se cumple normalmente para cualquier espacio vectorial S.

4. $U^{\perp}$: es el espacio nulo de la matriz con vectores de fila para los vectores extendidos de U; es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La base para $U^{\perp}$ es $\{(0,0,1,0), (-1,1,0,1)\}$.

$V^{\perp}$: es el espacio nulo de la matriz con vectores de fila para los vectores extendidos de U; es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La base para $V^{\perp}$ es $\{(0,0,0,1)\}$.

$U \cap V$: U es el espacio nulo de la matriz cuyas filas son los vectores base de $U^{\perp}$, según lo anteriormente expuesto. De donde se deduce que cualquier vector (x_1,x_2,x_3,x_4) en U cumplirá $x_3 = 0$ y $-x_1 + x_2 + x_4 = 0$. Del mismo modo, un vector (x_1,x_2,x_3,x_4) en V cumple $x_4 = 0$. Para que un vector se halle tanto en U como en V, debe cumplir todas estas ecuaciones; es decir, debe hallarse en el espacio nulo de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El cálculo habitual demuestra que $N(A)$ es una extensión de $\{(1,1,0,0)\}$.

Otra posibilidad: supongamos que v se halla en $U \cap V$. Dado que v se halla en U tenemos que $v = a(1,-2,0,3) + b(0,1,0,1) = (a,-2a + b,0,3a - d)$ para a,b constantes. Pero, al hallarse v en U, el último componente debe ser igual a cero, es decir, $3a - d = 0$, luego $3a = d$. Por consiguiente, $v = (c, -2c, + 3c,0,0) = c(1,1,0,0)$, de donde $U \cap V$ es un subconjunto de *extensión*$\{(1,1,0,0)\}$. No obstante, cualquier vector en la extensión de $(1,1,0,0)$ se halla en $U \cap V$. Por lo tanto, $U \cap V =$ *extensión*$\{(1,1,0,0)\}$.

5. (a) Basta con seguir los métodos indicados. (Pido disculpas por la mala calidad de los números del profesor Wei :-)).

$$A^T b = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, \hat{x} = \begin{bmatrix} -\frac{43}{59} \\ \frac{22}{59} \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} -\frac{43}{59} \\ \frac{108}{59} \\ \frac{23}{59} \end{bmatrix}$$

(b)

$$A^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}, \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5}\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

6. P multiplica un vector en $\mathbb{R}^m$ para obtener otro vector también en $\mathbb{R}^m$. Sabemos que P tiene que ser una matriz m x m. Para todo $v \in \mathbb{R}^m$; $P_v \in C(A^T)$. Por lo tanto, $C(P^T) = C(A^T)$. Así pues; $r(P) = r(A) = n$.