18.06: soluciones a la hoja de problemas nº5

Problema 1. Si una parábola encajara exactamente con los datos, tendríamos una solución (v_1, v_2, v_3) al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado que este sistema es incompatible, necesitamos buscar el vector $\hat{\mathbf{x}} = (B,C,D)$ que proporcione la solución más aproximada a este sistema en términos de mínimos cuadrados. Así, la parábola de mínimos cuadrados sería $y = B + Cx + Dx^2$. Sabemos que el vector que buscamos cumple la ecuación normal:

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T b.$$

en la que A indica la matriz 4 x 3 de más arriba y $\mathbf{b} = (2, 5, 7, 1)$. Tenemos:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix}; \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 37 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\hat{\mathbf{x}} = (\frac{-29}{4}, \frac{223}{20}, \frac{-9}{4})$

Problema 2.. (a) La línea para los datos de Europa es $y = C + Dx$, donde el vector $\hat{x} = (C,D)$ cumple $A^T A\hat{x} = A^T b$, con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 90 \\ 197 \\ 335 \\ 394 \end{bmatrix}$$

calculando los números, obtenemos : $\hat{\mathbf{x}} = (\frac{193}{2}, 21)$

Para los datos de Norteamérica utilizamos la misma matriz A con un valor de b = (317. 474.816.1101), lo que nos da un resultado de:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\frac{2729}{10}, \frac{1347}{25})$$

(b) Utilizando la línea $y = \frac{193}{2} + 21x$ aplicamos x = 30 para el año 2000, con lo que obtenemos unos gastos previstos de y = 726,5.

(c) En efecto, es previsible que la diferencia entre los gastos se incremente de manera significativa, ya que la pendiente de la línea de Norteamérica es más del doble de la línea europea.

Problema 3. Para demostrar que *S* es linealmente independiente, supongamos unas constantes $c_1,\dots c_n$, tales que:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots c_n\mathbf{v_n} = 0.$$

Al ser *S* un conjunto ortogonal, sabemos que $v_i \bullet v_j = 0$ para $i \neq j$ y $v_i \bullet v_i \neq 0$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Por lo que de cada *i* que se halle entre 1 y *n* obtenemos:

$$\mathbf{v_i} \cdot (c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots c_n\mathbf{v_n}) = \mathbf{v_i} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

De donde se deduce:

$$c_1(\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_i}) + \cdots + c_n(\mathbf{v_n} \cdot \mathbf{v_i}) = 0,$$

siendo iguales a cero todos los términos de la parte izquierda de la ecuación, excepto el término i-ésimo. Por consiguiente, la ecuación queda reducida a $c_i(v_i \cdot v_i) = 0$. Como $v_i \cdot v_i \neq 0$, debemos obtener $c_i = 0$. Vemos, pues, que si

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots c_n\mathbf{v_n} = 0$$

entonces $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, siendo el conjunto *S* linealmente independiente.

Problema 4.(a) Llamemos $v_1,\dots, v_n$ a las columnas de *B*, y formulemos $AB = [Av_1\ Av_2\ \dots\ Av_n]$. Necesitamos demostrar que el conjunto $S = \{Av_1\ Av_2\ \dots\ Av_n\}$ es ortonormal. Para ello, partiremos de $Av_i \cdot Av_j$ con $1 \leq i, j \leq n$. Tenemos:

$$A\mathbf{v_i} \cdot A\mathbf{v_j} = (A\mathbf{v_i})^T A\mathbf{v_j} = \mathbf{v_i}^T A^T A\mathbf{v_j}.$$

Al ser *A* ortogonal, $A^T A = I$, y $v_i^T A^T Av_j = vi^T vj$. Además, como *B* es ortogonal y sus columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$ tenemos que $v_i^T v_j = 0$ si $i \neq j$ y $v_i^T v_j = 1$ si $i = j$. De ello se deduce que *S* es un conjunto ortonormal. Al estar S formado por las columnas de la matriz *AB,* dicha matriz es ortogonal.

Prueba alternativa: Una matriz cuadrada C es ortogonal si, y solamente si, $C^T C = I$ (véase hoja de problemas nº 4). Tenemos que $(AB)^T (AB) = B^T A^T AB$. Al ser A y B ortogonales, $A^T A = I$ y $B^T B = I$. Así pues, $(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I$, siendo AB ortogonal.
(b) Siendo $det(A) = det(A^T)$ y $AA^T = I$, tenemos $det(AA^T) = det(A)det(A^T) = det(A)^2 = 1$.

Por consiguiente, $det(A)$ es 1 ó –1.

Problema 6. Aplicando operaciones de fila, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b^2-a^2) \\ 0 & c-a & (c^2-a^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b^2-a^2) \\ 0 & 0 & (c^2-a^2)-\frac{(c-a)}{(b-a)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b^2-a^2) \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix}$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$