18.06 **Prof. Edelman**

Soluciones a problemas seleccionados de la prueba nº 2 **9 de noviembre de 1998**

(2)

(a.) Las columnas de A son ortogonales y de norma 2. Por lo tanto:

$A = Q \cdot (2I)$, donde

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}A.$$

Esto significa que $R = 2I$.

(b.)

$A^{-1} = (Q(2I))^{-1} = (2I)^{-1}Q^{-1} = \frac{1}{2}I \cdot Q^T = \frac{1}{4}A^T = \frac{1}{4}A$ dado que $A^T = A$.

(4) A es una matriz de $n \times n$.

(a.) $R(A) =$ ¡ $^n \Rightarrow \text{rang}(A) = n \Rightarrow \dim C(A) = n \Rightarrow C(A) =$ ¡ ^{n}.

(b.) $N(A) =$ ¡ $^n \Rightarrow \text{rang}(A) = 0 \Rightarrow C(A) = Z =$ espacio vectorial cero.

(c.) $N(A^T) =$ ¡ $^n \Rightarrow \text{rang}(A) = 0 \Rightarrow C(A) = Z$.

(d.) Ejemplo 1: $A = [0]$.

Ejemplo 2:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0_m \\ \hline I_k & 0 \end{array}\right]$$

I_k es la matriz identidad de $k \times k$.

0_m es la matriz cero de $m \times m$.

(e.)

$$\left.\begin{array}{l} C(A) \perp R(A) \\ N(A) = (R(A))^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow C(A) \subseteq N(A)$$

De ahí,

$r + r = \dim C(A) + \dim R(A) \le \dim N(A) + \dim R(A) = n,$

es decir, $\boxed{2r \le m}$.

(f.) Partiendo de lo dicho en (e), $r \le \dfrac{n}{2} < n \Rightarrow A$ es singular $\Rightarrow \det(A) = 0$.