18.06 Profesor Edelman Prueba 3 20 de noviembre de 1998

Nombre: ____

Rodee con un círculo su grupo de repaso:

1)	M2	2-131	Darren Crowdy	crowdy@math	2-335	3-7905
2)	M2	2-132	Yue Lei	yuelei@math	2-586	3-4102
3)	M3	2-131	Darren Crowdy	crowdy@math	2-335	3-7905
4)	T10	2-131	Sergiu Moroianu	bebe@math	2-491	3-4091
5)	T10	2-132	Gabrielle Stoy	stoy@math	2-235	3-4984
6)	T11	2-131	Sergiu Moroianu	bebe@math	2-491	3-4091
7)	T11	2-132	Gabrielle Stoy	stoy@math	2-235	3-4984
8)	T12	2-132	Anda Degeratu	anda@math	2-229	3-1589
9)	T12	2-131	Edward Goldstein	egold@math	2-092	3-6228
10)	T1	2-131	Anda Degeratu	anda@math	2-229	3-1589
11)	T2	2-132	Yue Lei	yuelei@math	2-586	3-4102

1. (a.) (10 pts.) Hallar TODOS los autovalores y UN autovector para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un autovector de A y B.

$$\det(A-\lambda I)=(5-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)\Rightarrow\lambda=-1,-2,5$$

B es triangular inferior. Los autovalores están sobre la diagonal: 1, 5, -2.

1. (b.) (10 pts.) Hallar SÓLO un autovalor para cada una de las matrices siguientes. (Se puede hacer sin realizar operaciones aritméticas).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A es singular, ya que columna $1 +$ columna $3 = 2 \times$ columna 2. De modo que A tiene un autovalor 0.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

así que 5 es un autovalor de B.

2. (20 pts.) Pongamos que A tiene los autovalores λ_1, ..., λ_n (todos distintos de cero), con sus correspondientes autovectores x_1, ..., x_n, que forman una base para $\mathbf{R}^n$. Pongamos que C es su matriz de cofactores. (Las preguntas a las respuestas siguientes deben expresarse en términos de λ_i).

(a) (5 pts.) ¿Cuál es la traza de A^{-1}? ¿Y el det(A^{-1})?

(b) (15 pts.) ¿Cuál es la traza de C? ¿Cuál es det(C)? (Pista: $A^{-1} = \frac{C^T}{\det A}$.)

(a) A^{-1} tiene los autovalores $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n}$.

$$\text{traza}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_2}\cdots\frac{1}{\lambda_n}.$$

(b) Los autovalores de C^T son los mismos que los de C o $\det(A) \times$ los de A^{-1}.

Así, son $\mu_i = \dfrac{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}{\lambda_i}$

$$\text{traza}(C) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\left(\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\det(C) = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{n-1}$$

3. (30 pts.) Supongamos que A es simétrica (de $n \times n$) de rango $r = 1$ y con un autovalor igual a 7. Expresemos la solución a:

$$\frac{du}{dt} = -Au$$

de la forma $u(t) = M(t)u(0)$. (¡Atención al signo negativo!).

(a) (5 pts.) Escribir una expresión para $M(t)$ en términos de A y t.

(b) (15 pts.) ¿Es verdad que para todo t, $\text{traza}(M(t)) \geq \det(M(t))$? Justificar la respuesta hallando todos los autovalores de $M(t)$.

(c) (5 pts.) ¿Puede dispararse $u(t)$ cuando $t \to \infty$? Justificarlo.

(d) (5 pts.) ¿Puede $u(t)$ aproximarse a 0 cuando $t \to \infty$? Justificarlo.

(a) $M(t) = e^{-At}$

(b) $M(t)$ tiene un autovalor e^{-7t} y lo demás son 1.

(c) No se dispara. Todos los autovalores son ≤ 1.

(d) Si $u(0)$ es el autovector correspondiente a e^{7t}, entonces $u(t)$ se aproxima a 0.

4 (30 pts.) (a) Si B es invertible, demostrar que AB tiene los mismos autovalores que BA. (Pista: hallar una matriz M tal que $ABM = MBA$.)

$M = B^{-1}$, de modo que $AB = MBAM^2$ es semejante a BA.

(b) Hallar una matriz diagonalizable $A \neq 0$ que sea semejante a $-A$. Hallar también una matriz no diagonalizable A que sea semejante a $-A$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$