18.06 **Soluciones de la prueba 2** **10 de noviembre de 1999**

No se permiten libros

1. (25 pts.) (a) Encontrar ecuaciones (no resolverlas) para los coeficientes C, D, E en $b = C + Dt + Et^2$, la parábola que mejor se ajusta a los cuatro puntos: $(t, b) = (0, 0), (1, 1), (1, 3)$ y $(2, 2)$.

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$Ax = b$ no tiene solución. Tenemos que buscar su solución por mínimos cuadrados y resolver el sistema.

$$A^T A \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = A^T b, \quad \text{es decir,} \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

(b) Al resolver este problema, se está proyectando el vector $\underline{b = (0, 1, 3, 2)}$ sobre el subespacio generado por <u>los vectores de columna de A</u>. La proyección en términos de C, D, E es:

$$P = A\hat{x} = A \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C + D + E \\ C + D + E \\ C + 2D + 4E \end{bmatrix}.$$

2. (28 pts.) Tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar los autovalores de la matriz singular A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)\lambda,$$

de modo que los autovalores de A son 0, 1, 1.

(b) Hallar una base para $\mathbf{R}^3$ que se componga de autovectores de A.

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} x = 0 \text{ tiene la solución especial} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - I)x = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x = 0 \text{ tiene las soluciones especiales} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así que una de estas bases sería: $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(c) Calcular $A^{99} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, expresando (1, 1, 1) como combinación de autovectores, o diagonalizando $A = S\Lambda S^{-1}$.

Primer método:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De ahí:

$$A^{99} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^{99}(6v_1) + A^{99}(v_2) + A^{99}(-5v_3) = 0 + v_2 - 5v_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Segundo método:

$$A = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1},$$

$$A^{99} = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{99} S^{-1} = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1} = A.$$

De ahí:

$$A^{99} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

3. (25 pts.) Empezamos con dos vectores (las columnas de A):

$$a_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Siendo $q_1 = a_1$, hallar una base ortonormal q_1, q_2 para el espacio generado por a_1 y a_2 (espacio de columnas de A).

$$b_2 = a_2 - a_2 \cdot q_1 q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\cos^2\theta \\ 0 \\ -\cos\theta \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix},$$

$$q_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ 0 \\ -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(b) ¿Qué forma tiene la matriz R en $A = QR$ y por qué $R = Q^T A$? Aquí Q tiene las columnas q_1 y q_2. Calcular la matriz R.

R es una matriz triangular superior de 2 × 2.

$$A = QR \quad \Rightarrow \quad Q^T A = Q^T QR \quad \Rightarrow \quad Q^T A = IR = R$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar las matrices de proyección P_A y P_Q sobre los espacios de columnas de A y Q.

$$\text{Dado que } C(A) = C(Q), \quad P_A = P_Q = QQ^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si se dan cuenta de que el segundo elemento tanto de a_1 como de a_2, es cero, entonces sabrán que están buscando la matriz de proyección sobre el plano xz. Es posible obtener la respuesta sin llevar a cabo ninguna multiplicación de matrices.

4. (22 pts.) (a) Si Q es una matriz ortogonal (cuadrada con columnas ortonormales), demostrar que det Q = 1 o –1.

$$\begin{aligned}
&Q^T Q = I \\
&\Rightarrow \left|Q^T Q\right| = |I| \\
&\Rightarrow \left|Q^T\right||Q| = 1 \\
&\Rightarrow |Q||Q| = 1 \text{ porque } \left|A^T\right| = |A| \\
&\Rightarrow |Q| = \pm 1.
\end{aligned}$$

(b) ¿Cuántos de los 24 elementos de det A son distintos de cero y cuál es el determinante de A?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay cuatro elementos distintos de cero en det A:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cada uno de estos cuatro elementos es igual a –1, así que det=-4.