

18.06 Prueba 3 3 de diciembre de 1999 No se permiten libros

1. (36 pts.) Tenemos una ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dt} = Au, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } u(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar los autovalores y autovectores y realizar una diagonalización de la forma $A = SAS^{-1}$.

A no es invertible, por lo tanto uno de sus autovalores es 0.

$Tr(A) = -5$, así es que el otro autovalor de A tiene que ser -5 .

Un autovector de A asociado al autovalor 0 es $(3, 2)$.

Un autovector de A asociado al autovalor -5 es $(1, -1)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix}.$$

(b) Resolver la ecuación para $u(t)$, partiendo del valor dado $u(0)$.

$$\text{La solución general es } u(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{La condición } u(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ se cumple cuando } c_1 = 1, c_2 = 2.$$

(c) Calcular la matriz e^{At} por medio de S y Λ .

$$A = S\Lambda S^{-1} \Rightarrow e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}.$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Por lo tanto}}{=} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2e^{-5t} + 3 & -3e^{-5t} + 3 \\ -2e^{-5t} + 2 & 3e^{-5t} + 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Hallar los límites de $u(t)$ y e^{At} cuando t tiende a infinito.

$$\text{Cuando } t \rightarrow \infty, e^{-5t} \rightarrow 0, u(t) \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } e^{At} \rightarrow \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. (40 pts.) La matriz A tiene 3 en la diagonal y 2 en todos los demás elementos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Es A definida positiva? ¿Cuál es el valor mínimo de $x^T Ax$ para todos los vectores x de \mathbf{R}^3 ?

A es definida positiva ya que:

1. Es simétrica.
2. Los **determinantes superiores izquierdos** son 3, 5 y 7.

A es definida positiva $\Rightarrow x^T Ax \geq 0$.

Cuando $x = 0$, $x^T Ax = 0$. Por consiguiente, 0 es el mínimo.

- (b) Todos los elementos de $B = A - I$ son 2. Partiendo de su rango, hallar todos los autovalores de B y, a continuación, todos los de A .

Las tres columnas de B son iguales

$\Rightarrow \text{Rango}(B) = 1$

$\Rightarrow N(B)$ es de dimensión 2

$\Rightarrow B$ tiene dos autovectores independientes para el autovalor 0

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, y $\lambda_3 = \text{tr}(B) = 6$.

Los autovalores de A son 1, 1, 7.

- (c) Escribir una matriz simétrica concreta C que sea similar a A . Si es posible, definir también una matriz no simétrica N que sea similar a A . Escribir también una matriz J con los mismos autovalores que A pero que no sea similar a ella. (Dar los 9 números de C , N y J .)

$$C = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Explicación: A es simétrica (por lo que se podría poner que $C = A$) y, por lo tanto, se puede diagonalizar para obtener Λ . Si pensamos en:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Tiene los autovalores 1, 1 y 7.

Si D es similar a A , también se puede diagonalizar hasta Λ y, por lo tanto, tiene que tener dos autovectores para el autovalor 1. Esto es posible si $x = 0$. La C escogida se obtiene haciendo que $y = z = 0$. La N escogida se obtiene haciendo que $y = 0$, $z = 1$.

Cuando $x \neq 0$, D no es similar a A . La J escogida se obtiene haciendo que $x = 1$.

Nota: Existen formas posibles de C , N y J que no son triangulares superiores.

- (d) Para la matriz de 6 por 6 A_6 , con 3 en la diagonal y 2 en todos los demás elementos, utilizar el mismo método (con $A_6 - I$) para hallar los seis autovalores. Si se eligen bien los autovectores, ¿en qué forma se puede factorizar A ?

La matriz $B_6 = A_6 - I$ es de rango 1, así que tiene 5 autovectores independientes para el autovalor 0. De ahí se sigue que:

los autovalores de B_6 son 0, 0, 0, 0, 0, $12 = \text{tr}(B)$ y

los autovalores de A_6 son 1, 1, 1, 1, 1, 13.

Ya sabemos que $A = SAS^{-1}$ para una S cuyas columnas son autovectores independientes de A . Pero A es simétrica, así que podemos elegir que sus autovectores sean ortonormales y trabajar con $A = Q\Lambda Q^{-1}$, donde Q es ortogonal.

3. (24 pts.) Imaginemos una $A = U\Sigma V^T =$ (ortogonal de 2×2) (diagonal) (ortogonal de 3×3)

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

- (a) ¿Cuáles son los autovalores y autovectores de $A^T A$?

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \Sigma V^T.$$

$$\Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de $A^T A$ son 16, 1, 0.

v_1 es un autovector de $A^T A$ para el autovalor 16.

v_2 es un autovector de $A^T A$ para el autovalor 1.

v_3 es un autovector de $A^T A$ para el autovalor 0.

- (b) ¿Cuál es el espacio nulo de A ? (Describirlo en su totalidad.)
El espacio nulo de A es el intervalo lineal (*linear span*) de v_3 .
- (c) ¿Cuál es el espacio de filas de A ? (Describirlo en su totalidad.)
El espacio nulo de A es el intervalo lineal (*linear span*) de v_1 y v_2 .