

## 18.06: examen final de álgebra lineal

21 de diciembre de 2000

9.00 – 12.00

Profesor Strang

Nombre: \_\_\_\_\_

Calificación: 1

2

3

4

5

6

7

8

---

**Rodee con un círculo su grupo de repaso:**

1)	M2	2-131	Holm	2-181	3-3665	<a href="mailto:tsh@math">tsh@math</a>
2)	M2	2-132	Dumitriu	2-333	3-7826	<a href="mailto:dumitriu@math">dumitriu@math</a>
3)	M3	2-131	Holm	2-181	3-3665	<a href="mailto:tsh@math">tsh@math</a>
4)	T10	2-132	Ardila	2-333	3-7826	<a href="mailto:fardila@math">fardila@math</a>
5)	T10	2-131	Czyz	2-342	3-7578	<a href="mailto:czyz@math">czyz@math</a>
6)	T11	2-131	Bauer	2-229	3-1589	<a href="mailto:bauer@math">bauer@math</a>
7)	T11	2-132	Ardila	2-333	3-7826	<a href="mailto:fardila@math">fardila@math</a>
8)	T12	2-132	Czyz	2-342	3-7578	<a href="mailto:czyz@math">czyz@math</a>
9)	T12	2-131	Bauer	2-229	3-1589	<a href="mailto:bauer@math">bauer@math</a>
10)	T1	2-132	Ingerman	2-372	3-4344	<a href="mailto:ingerman@math">ingerman@math</a>
11)	T1	2-131	Nave	2-251	3-4097	<a href="mailto:nave@math">nave@math</a>
12)	T2	2-132	Ingerman	2-372	3-4344	<a href="mailto:ingerman@math">ingerman@math</a>
13)	T2	1-150	Nave	2-251	3-4097	<a href="mailto:nave@math">nave@math</a>

Conteste a las 8 preguntas en estas páginas (25 apartados, 4 puntos cada uno). En este examen no se permiten libros ni apuntes. Las calculadoras no son necesarias en modo alguno, así que tampoco están permitidas (en pro de la igualdad de condiciones). **Su profesor de repaso es el único que conocerá sus calificaciones.** Que pase unas buenas vacaciones y gracias por haber escogido el curso 18.06. GS

- 1.
- (a) Explicar por qué todos los autovectores de  $A$  están contenidos bien en su espacio de columnas, o bien en su espacio nulo (o explicar por qué esta afirmación es falsa).
  - (b) Partiendo de  $A = SAS^{-1}$ , hallar la matriz de autovalores y la matriz de autovectores para  $A^T$ . ¿Qué relación hay entre los autovalores de  $A$  y los de  $A^T$ ?
  - (c) Supongamos que  $Ax = 0$  y  $A^T y = 2y$ . Deducir que  $x$  es ortogonal a  $y$ . Se puede probar esto directamente o utilizar las ideas relativas al subespacio que aparecen en (a) o las matrices de autovectores que aparecen en (b). La respuesta debe ser clara.

2.

- (a) Supongamos que  $A$  es una matriz simétrica. Si primero restamos 3 veces la fila 1 de la fila 3, y a continuación restamos 3 veces la columna 1 de la columna 3, ¿la matriz resultante sigue siendo simétrica? ¿Sí o no necesariamente? Razonarlo.
- (b) Definir una matriz definida positiva simétrica (pero no diagonal) con autovalores 1, 2, 4.
- (c) Definir (si es posible) una matriz no simétrica con dichos autovalores. Definir (si es posible) una matriz de rango uno con estos mismos autovalores.

3.

El método de Gram-Schmidt es una factorización  $A = QR$  (partiendo de una  $A$  rectangular con columnas independientes, se obtiene una  $Q$  con columnas ortonormales y una  $R$  triangular superior). El problema es obtener estas mismas  $Q$  y  $R$  a llevando a cabo una eliminación ordinaria (simétrica) en  $A^T A$  que dé:

$$A^T A = LDL^T = R^T R \quad (\text{donde } R = \sqrt{DL^T}).$$

- (a) ¿Cómo sabemos que los pivotes son positivos, para que  $\sqrt{D}$  produzca números reales?
- (b) De  $A^T A = R^T R$  se deduce que la matriz  $Q = AR^{-1}$  tiene columnas ortonormales (¿qué prueba se emplea?). De ahí,  $A = QR$ .
- (c) Aplicar el método Gram-Schmidt a los vectores  $a_1$  y  $a_2$  para obtener  $q_1$  y  $q_2$ . Expresar el resultado de la forma  $QR$ :

$$a_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.

Los números de Fibonacci  $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$  son  $0, 1, 1, 2, 3, \dots$  y obedecen a la regla  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ , lo cual, en forma matricial se expresa:

$$\begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} \text{ o bien } \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k.$$

Llamaremos  $a$  y  $b$  a los autovalores de esta matriz concreta  $\mathbf{A}$ .

- (a) ¿Qué ecuación cuadrática relacionada con  $\mathbf{A}$  halla la solución (las raíces)  $a$  y  $b$ ?
- (b) Hallar una matriz con autovalores  $a^2$  y  $b^2$ . ¿Qué ecuación cuadrática resuelve  $a^2$  y  $b^2$ ?
- (c) Realizando el cálculo directo de  $\mathbf{A}^4$  se obtiene:

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tratar de adivinar los elementos de  $\mathbf{A}^k$ , utilizando los números de Fibonacci. A continuación, multiplicarlo por  $\mathbf{A}$  para demostrar por qué esos valores son correctos. ¿Cuál es el determinante de  $\mathbf{A}^k$ ? (No es una pregunta difícil)?

5.

Supongamos que  $A$  es de 3 por 4 y que su forma escalonada reducida por filas es  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Los cuatro subespacios asociados a la matriz inicial  $A$  son  $N(A)$ ,  $C(A)$ ,  $N(A^T)$  y  $C(A^T)$ . Hallar la dimensión de cada subespacio y, si es posible, también una base.
- (b) Hallar la solución completa (¿cuándo existe solución?) de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

- (c) Hallar una matriz  $A$  sin ningún elemento igual a cero (si es posible), cuya forma escalonada reducida por filas sea esta misma  $R$ .

6.

Supongamos que  $A$  es una matriz de tres por tres y que conocemos las tres salidas,  $y_1 = Ax_1$ ,  $y_2 = Ax_2$  e  $y_3 = Ax_3$ , de los tres vectores de entrada independientes,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .

- (a) Hallar la matriz  $A$  usando esta pista: colocar los vectores  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  en las columnas de una matriz  $X$  y multiplicar  $AX$ . ¿Por qué he exigido que las  $x$  sean independientes?
- (b) ¿Qué condiciones tienen que cumplirse en  $A$  para que las salidas  $y_1, y_2$  e  $y_3$  constituyan una base para  $\mathbf{R}^3$ ? Justificar la respuesta.
- (c) Si  $x_1, x_2, x_3$  es la base de entrada e  $y_1, y_2, y_3$  es la base de salida, ¿cuál es la matriz  $M$  que representa esta misma transformación lineal (definida por  $T(x_1) = y_1, T(x_2) = y_2, T(x_3) = y_3$ )?

7.

(a) Hallar los autovalores de la matriz antidiagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Hallar tantos autovectores como sea posible, con las mejores propiedades posibles. ¿Existen 4 autovectores independientes? ¿Existen 4 autovectores ortonormales?
- (c) ¿Qué rango tiene  $A + 2I$ ? ¿Cuál es su determinante?

- 8.
- (a) Si  $U\Sigma V^T$  es la descomposición de valor singular de  $A$  (de  $m$  por  $n$ ), dar la fórmula de la mejor solución por mínimos cuadrados  $\bar{x}$  para  $Ax = b$ . (Simplificar la fórmula tanto como sea posible).
  - (b) Escribir las ecuaciones para que la recta  $b = C + Dt$  atraviese los cuatro puntos  $(t_1, b_1)$ ,  $(t_2, b_2)$ ,  $(t_3, b_3)$  y  $(t_4, b_4)$ . Estos puntos están dispuestos sobre una línea siempre y cuando el vector  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  se encuentre en \_\_\_\_\_.
  - (c) Supongamos que  $S$  es el subespacio generado por las columnas de una matriz  $A$  de  $m$  por  $n$  cualquiera. Hallar la fórmula de la matriz de proyección  $P$  que proyecta cada uno de los vectores contenidos en  $\mathbf{R}^m$  sobre el subespacio  $S$ . Explicar de dónde proviene la fórmula y cualquier condición que deba cumplir  $A$  para que ésta sea correcta.
  - (d) Supongamos que tanto  $x$  como  $y$  se encuentran en el espacio de filas de la matriz  $A$ , y que  $Ax = Ay$ . Demostrar que  $x - y$  es el espacio nulo de  $A$ . Demostrar a continuación que  $x = y$ .