18.06: soluciones a la prueba 1 de matemáticas

1. (30 pts.) (a) Dado que la fila 3 de R está íntegramente compuesta por ceros, la fila 3 de A tiene que ser una combinación lineal de sus filas 1 y 2. Las tres filas de A son linealmente dependientes.

(b) Tras realizar un paso de la eliminación, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & a-4 & -1 & 8-2b \\ & (\text{fila} & 3) & \end{bmatrix}.$$

Si nos fijamos en R, nos damos cuenta de que la segunda columna de A no es una columna pivote, de modo que $a = 4$. Si continuamos con la eliminación, llegamos a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8-b \\ 0 & 0 & 1 & 2b-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comparando esto con R, vemos que $b = 5$.

(c) Si igualamos las variables libres x_2 y x_4 a 1 y 0, y viceversa, y resolvemos $Rx = 0$, obtenemos la solución del espacio nulo:

$$x = c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El espacio de filas y el espacio nulo son siempre iguales para A y R.

2. (30 pts.) (a) Tras la eliminación, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & c-8 \end{bmatrix}.$$

De modo que la matriz no será invertible cuando $c = 8$.

(b) Cuando c es distinto de 8, la matriz es invertible y su rango es 3.Por lo tanto, su espacio de nulo consiste únicamente en el vector cero y su espacio de columnas abarca la totalidad de $\mathbf{R}^3$. La misma lógica y respuestas se aplican a A^{-1}.

(c) Utilizando los multiplicadores derivados de la eliminación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

3. (40 pts.) (a) Tiene que haber un pivote en cada fila, así que $r = m$ y el espacio de columnas de A abarca la totalidad de $\mathbf{R}^m$.

(b) En todos los casos $r \leq n$. Por (a) sabemos que $r = m$. De estas dos premisas se deduce también que $m \leq n$.

(c) Simplemente, se utiliza un múltiplo de [2,5] también para las otras filas. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El espacio de columnas será la línea de $\mathbf{R}^3$ formada por todos los múltiplos de la primera columna de cada ejemplo concreto. El espacio nulo será la recta en $\mathbf{R}^2$ que contenga todos los múltiplos de la solución del espacio nulo $\begin{bmatrix} -5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Sumando la solución concreta $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a la solución del espacio nulo que aparece en (c), obtenemos la solución completa:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$