18.06: soluciones a la prueba 2 de matemáticas

1. (36 pts.) (a) $q_4^* \mid \ v\,4 / q_1^T v 0 q_1 \ 4 / q_2^T v 0 q_2 \ 4 / q_3^T v 0 q_3$

$$q_4 \mid \frac{q_4^*}{\left\| q_4^* \right\|}$$

(b) El espacio nulo de Q es simplemente el vector cero (Q tiene un pivote en cada columna). El espacio nulo de Q^T es de dimensión uno y consiste en todos los múltiplos escalares de q_4 (porque sabemos que q_4 es ortogonal a q_1, q_2 y q_3).
El espacio nulo de $Q^TQ = I$ es también el vector cero. El espacio nulo de QQ^T es, una vez más, de dimensión uno y consiste en todos los múltiplos escalares de q_4.

(c) $Q^T Q\overline{x} \mid \ Q^T b$ es lo mismo que $\overline{x} \mid \ Q^T b$, de modo que

$$\overline{x} \mid \begin{pmatrix} q_1^T / q_1 \ 2\ 2q_2 \ 2\ 3q_3 \ 2\ 4q_4 0 \\ q_2^T / q_1 \ 2\ 2q_2 \ 2\ 3q_3 \ 2\ 4q_4 0 \\ q_3^T / q_1 \ 2\ 2q_2 \ 2\ 3q_3 \ 2\ 4q_4 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La proyección $p \mid \ Q\overline{x} \mid \ q_1 \ 2\ 2q_2 \ 2\ 3q_3$.

2. (30 pts.) (a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}3\\ 5\\ K\end{pmatrix}$

$Ax = b$ tiene una solución exacta cuando b se encuentra en el espacio de columnas. Esto sucede cuando $K = 7$.

(b) $\bar{x} = 0$ es la solución por mínimos cuadrados cuando b se encuentra en el espacio nulo de A^T. Para que $\begin{pmatrix}3\\ 5\\ K\end{pmatrix}$ esté contenido en el espacio nulo de A^T, K tendría que ser igual a -8 y a $\frac{421}{4}$, lo cual es imposible.

3. (40 pts.)

(a) El cofactor de a_{14} estará sumado al determinante. En la segunda parte de la pregunta, el determinante se doblará.

(b) Sabemos que $P^2 = P$, por lo que $(\det(P))^2 = \det(P)$, con lo cual $\det(P) =$ 0 ó 1.

(c) Utilizando los cofactores por la primera columna, $\det(C) \,|\, (4b)(4b)(a^2\ 4\ b^2)\,2\,(4a)(a)(a^2\ 4\ b^2) \,|\, 4(a^2\ 4\ b^2)^2$.

(d) 24 elementos utilizando a_{11} + 24 elementos utilizando a_{22} – 6 elementos utilizándolos a los dos = 42 en total.