18.06: soluciones a la prueba 3 de matemáticas

1. (30 pts.) (a)

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

Los autovalores de B deben ser ambos 1. Supongamos que B tiene la forma de Jordan $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, siendo $B = MJM^{-1}$. Entonces $B^n = MJ^nM^{-1}$ y $J^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, que no puede ser convergente. Por lo tanto, B NO puede tener la forma de Jordan J. La única alternativa es que B tenga la forma de Jordan I, en cuyo caso $B = MIM^{-1} = I$.

2. (40 pts.) (a) $S^{-1} = S^T$, con lo cual $A = S\Lambda S^{-1}$ es simétrica. Los valores singulares nunca son negativos, así que de $\Lambda = \Sigma$ se deduce que los autovalores de A no son negativos, por lo que A es semidefinida positiva y simétrica. Puede ser singular (la matriz con todos los elementos iguales a cero es un ejemplo.

(b) Los autovalores de una matriz de proyección son, o bien 1, o bien 0, y su suma es dos, luego tienen que ser 1, 1 y 0. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(c) $A^T A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$, así que los valores singulares son 7 y 5, por lo tanto:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } A = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d)
1. Los autovalores de A son 1, 1, 2, los mismos que los de B.
2. A puede ser diagonalizable o no.
3. A puede ser simétrica o no.
4. A, sin lugar a dudas, (!) tiene autovalores positivos. No obstante, puede no ser simétrica, por lo que puede ser definida positiva o no.

3. (30 pts.) (a) Los autovalores son $0, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$. Todos son imaginarios puros (el cero incluido) porque A es antisimétrica.

(b) La solución general es $\vec{u}(T) = c_1\vec{x}_1 + c_2 e^{\sqrt{2}iT}\vec{x}_2 + e^{-\sqrt{2}iT}\vec{x}_3$.

(c) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Esta función tiene un periodo de 2π, de modo que cuando $\sqrt{2}T = 2n\pi$, tenemos que $\vec{u}(T) = \vec{u}(0)$. En particular, T puede ser $\sqrt{2}\pi$.