18.06 Profesor Strang Soluciones al examen 2 8 de abril de 1998

1. (a) $\|a_1\| = 2$, por lo que $q_1 = a_1/2$. A continuación restamos de a_2 su proyección sobre a_1:

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{8}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que la longitud es también $\|B\| = 2$, por lo que $q_2 = B/2$. El vector $a_3 = a_1 + a_2$ no afecta a la dimensión de S ni a la de su base.

(b)

$$p = QQ^Tb = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. (a) El complemento ortogonal de S es el espacio nulo de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las soluciones especiales nos dan una base para $S^\perp$ (pero es posible hallar una base distinta):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Puesto que b se divide en partes perpendiculares $p + q$, sabemos que

$$q = b - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. (a)

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

El producto de los pivotes es 9.

(b) Hay cuatro términos distintos de cero: 16, –4, –4 y 1.

(c) det $A_n = 2 \det A_{n-1} - \det M_{n-2}$. La matriz M_{n-2} comienza con $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en su esquina superior izquierda y continúa como A_{n-2}. El valor $n = 4$ solamente nos permite ver esa esquina de tipo dos por dos de la regla del cofactor utilizada dos veces (la cual suprime las filas 1,3 y las columnas 1,3)

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 2 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 2 \end{bmatrix}$$

Nota para próximas clases: si continúo con M_{n-2}, acabo llegando a

$$\det A_n = 2 \det A_{n-1} - 2 \det A_{n-3} + \det A_{n-4}.$$

4. (a) $P = A(A^TA)^{-1}A^T$: la matriz A^TA sólo es reversible si y solamente si A tiene columnas independientes.

(b) Las propiedades dan como resultado $PP^T = P$. Compare la entrada (1,1) en ambos lados de la ecuación para hallar $v^Tv = v_1$.