18.06 Soluciones al examen 1 1 de marzo de 2000

Problema 1. (a) Tras formar la matriz y realizar una reducción por filas, la tercera fila se convierte en [0 0 0 -1], lo cual corresponde a la ecuación 0 = -1, así que no hay solución.
(b) El mismo argumento demuestra que, para que $Ax = b$ tenga solución, b tiene que cumplir $b_3 = b_1 + b_2$.
(c) Si A fuera invertible, siempre habría solución para $Ax = b$.

Problema 2. (a)

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Por la matriz U del apartado (a), vemos que todas las columnas son columnas pivote. Las columnas pivote de A forman una base para el espacio de columnas: (2,2,0), (2,5,3), (1,0,2). Dado que el rango es tres, el espacio de columnas es todo $\mathbf{R}^3$, así que otra base sería la estándar (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). De hecho, cualquier trío de vectores independientes contenidos en $\mathbf{R}^3$ serviría como base.
(c) El rango es tres porque hay tres pivotes.

Problema 3. (a) Se trata de una factorización LU. U es la forma escalonada de A, así que se puede ver que existen tres pivotes, por lo que A es de rango tres.
(b) Una base para $N(A)$ se compone de las soluciones especiales, que son (-1, -2, 1, 0, 0) y (-1, 1, 0, -1, 1).
(c) Una solución particular es (-30, –15, 0, 10, 0), por lo que la solución completa es

$$\begin{bmatrix} -30 \\ -15 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. (a) Una base sería $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(b) El subespacio consistente en todos los múltiplos de A es un subespacio que contiene a A pero no a B.
(c) Verdadero: si un subespacio V contiene a A y a B, entonces contiene a $A – B = I$.
(d) Es válida la misma respuesta que para (b).

Problema 5. Existen muchas formas distintas de probarlo. Una es decir que si $A^2 = 0$, es obvio que A^2 no es invertible. Por lo tanto, A tampoco es invertible, ya que el producto de matrices invertibles es también invertible. O lo que es lo mismo, si A fuera invertible, A^2 también lo sería.