18.06 **Soluciones al examen 2** **25 de abril de 2000**

1. (30 pts.)

(a) $q_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, q_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, q_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

q_3 se halla calculando el espacio nulo de A y realizando después una normalización, o multiplicando $q_1 \times q_2$, o adivinando un vector independiente de q_1 y q_2 y aplicando el método Gram-Schmidt.

(b) q_3 es el espacio nulo por la izquierda de A, ya que es ortogonal a ambas columnas de A.

(c) $P = q_3(q_3^T q_3)^{-1} q_3^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

(d) $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

2. (16 pts.) Fórmula extendida: det de A = 16 - 4 - 4 - 4 + 1 = 5

Reducción por filas: det de A = det de $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = 5.$

3. (30 pts.)

(a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\lambda_1 = 1$ con autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ con autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(d) $A^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} G_\infty \\ G_\infty \end{pmatrix} = A^\infty \begin{pmatrix} G_1 \\ G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así pues, $G_k \to \dfrac{2}{3}$.

4. (24 pts.)

(a) $n - r$ = dimensión del espacio nulo de A = número de autovalores de A iguales a 0. Así pues, $r = 2$.

(b) $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A)$ y
$\det(A) = 0 * 1 * 2 = 0$, con lo cual $\det(A^T A) = 0$.

(c) Al sumar 1 a la matriz, los autovalores aumentan en 1. Así, los autovalores de $A + I$ son 1, 2, 3 y det(A)= 1 * 2 * 3 = 6.

(d) Si A tiene un autovalor λ, entonces A^{-1} tiene un autovalor $\frac{1}{\lambda}$. Así pues, los autovalores de $(A + I)^{-1}$ son $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.