**18.06** **Soluciones al examen 3** **3 de mayo de 2000**

**Problema 1.** (a) Se hallan los autovalores mutiplicando cada vector por $A^TA$: 64, 4 y 0.
(b) Los valores singulares son las raíces cuadradas de los autovalores distintos de cero de $A^TA$: 8 y 2.
(c) La descomposición de valor singular es:

$$A=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

**Problema 2.** (a)Falso. La matriz de identidad de 2 × 2 es simétrica, pero tiene muchos autovectores no perpendiculares, como (1, 0) y (1, 1).
(b) Verdadero, porque $A$ se puede diagonalizar mediante una matriz ortogonal: $A = Q\Lambda Q^T$. Dicha matriz es simétrica: $(Q\Lambda Q^T)^T = Q\Lambda Q^T$.
(c) Falso. Mismo ejemplo que en el apartado (a).

**Problema 3.** No existe ningún valor tal que $d > 0$. Tener autovalores positivos significa que $A$ es definida positiva. Los determinantes superiores por la izquierda son 1, $d - 4$ y $12 - 4d$. Éstos nunca son todos positivos.

**Problema 4.** (a) $\lambda = 1$ se repite. El número de autovectores independientes $\lambda = 1$ viene dado por las dimensiones de $N(A - I)$, que es dos. Por lo tanto, $A$ tiene dos autovectores independientes $\lambda = 1$, por lo que $\lambda = 1$ debe repetirse.
(b) $A$ tiene tres autovectores independientes, así que es diagonalizable, es decir, similar a

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

(c) La matriz

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

tiene los mismos autovalores y el mismo número de autovalores independientes que $A$, así que es similar a ella.
(d) La matriz

$$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

tiene los mismos autovalores que $A$, pero le falta un autovector: el rango de $C - I$ es dos, así que $C$ sólo tiene un autovector independiente $\lambda = 1$.