

# GLOSARIO: DICCIONARIO DE ÁLGEBRA LINEAL

**Autovalor  $\lambda$  y autovector  $x$ .**  $Ax = \lambda x$ , siendo  $x \neq 0$ , de modo que  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

**Base de  $V$ .** Vectores independientes  $v_1, \dots, v_d$ , cuyas combinaciones lineales dan como resultado todas las  $v$  de  $V$ . ¡Un espacio vectorial tiene muchas bases!

**Base estándar para  $\mathbb{R}^n$ .** Columnas de la matriz identidad de  $n$  por  $n$  (expresadas como  $i, j, k$  en  $\mathbb{R}^3$ ).

**Cociente de Rayleigh  $q(x) = x^T Ax / x^T x$**  para una matriz simétrica  $A$ :  $\lambda_{\min} < q(x) < \lambda_{\max}$ . Los autovectores  $x$  alcanzan dichos extremos para  $\lambda_{\min}(A)$  y  $\lambda_{\max}(A)$ .

**Cofactor  $C_{ij}$ .** Eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$ ; multiplicar el determinante por  $(-1)^{i+j}$ .

**Columnas libres de  $A$ .** Columnas sin pivotes; combinaciones de anteriores columnas.

**Columnas pivote de  $A$ .** Columnas que contienen pivotes tras una reducción por filas; no son combinaciones de anteriores columnas. Las columnas pivote conforman la base del espacio de columnas.

**Combinación lineal  $cv + dw$**  o  $\sum c_j v_j$ . Suma de vectores y multiplicación de escalares.

**Complemento de Schur  $S = D - CA^{-1}B$ .** Aparece al realizar la eliminación por bloques en  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ .

**Condicionamiento de la matriz  $A$ .**  $cond(A) = k(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ . En  $Ax = b$ , la perturbación relativa  $\|\delta x\| / \|x\|$  es menor que  $cond(A)$  veces la perturbación relativa  $\|\delta b\| / \|b\|$ . El condicionamiento de la matriz mide hasta qué punto la salida es susceptible de cambiar en función de los datos de entrada.

**Conjugado complejo.**  $\bar{z} = a - ib$  para cualquier número complejo  $z = a + ib$ . De ahí  $z\bar{z} = |z|^2$ .

**Conjunto conectado (Spanning set)  $v_1, \dots, v_m$  para  $V$ .** Todos los vectores de  $V$  son combinaciones de  $v_1, \dots, v_m$ .

**Cuatro subespacios fundamentales de  $A = C(A), N(A), C(A^T), N(A^T)$ .**

**Dependencia lineal  $v_1, \dots, v_n$ .** Una combinación distinta de todas las  $c_i = 0$  da como resultado  $\sum c_i v_i$ .

**Descomposición de valor singular (SVD)  $A = U\Sigma V^T = (U \text{ ortogonal}) \text{ por } (\text{diagonal } \Sigma) \text{ por } (V^T \text{ ortogonal})$ .** Las primeras columnas  $r$  de  $U$  y  $V$  son bases ortonormales de  $C(A)$  y de  $C(A^T)$ , siendo  $Av_i = \sigma_i u_i$  y el valor singular  $\sigma_i > 0$ . Las últimas columnas de  $U$  y  $V$  son bases ortonormales de los espacios nulos de  $A^T$  y  $A$ .

**Descomposición polar  $A = QH$ .**  $Q$  ortogonal,  $H$  (semi)definida positiva.

**Desigualdad de Schwarz.**  $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$ . Entonces  $|v^T Aw| \leq (v^T Av)(w^T Aw)$  si  $A = C^T C$ .

**Desigualdad triangular  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .** Para las normas matriciales  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

**Determinante**  $|A| = \det(A)$ . Se define de la siguiente manera: el  $\det I = 1$ , el signo cambia al intercambiar filas y en todas las filas se cumple la linealidad. El  $|A| = 0$  cuando  $A$  es singular. Asimismo,  $|AB| = |A||B|$  y  $|A^{-1}| = 1/|A|$  y  $|A^T| = |A|$ . La fórmula extendida del  $\det(A)$  consiste en una suma de  $n!$  elementos, el método de desarrollo por cofactores (cofactor formula) utiliza determinantes de tamaño  $n - 1$ , siendo el volumen del paralelepípedo  $= |\det(A)|$ .

**Diagonalización**  $A = S^{-1}AS$ .  $A$  = matriz de autovalores y  $S$  = matriz de autovectores.  $A$  tiene que tener  $n$  autovectores independientes para que  $S$  sea invertible. Toda  $A^k = SA^k S^{-1}$ .

**Dimensión del espacio vectorial.**  $\dim(V)$  = número de vectores en cualquier base para  $V$ .

**Ecuación característica.**  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Las  $n$  raíces son los autovalores de  $A$ .

**Ecuación normal**  $A^T A \hat{x} = A^T b$ . Da la solución por mínimos cuadrados de  $Ax = b$  si  $A$  es de rango  $n$ . La ecuación dice que (columnas de  $A$ )  $(b - A\hat{x}) = 0$ .

**Eigshow.** Autovalores y valores singulares gráficos de 2 por 2 (código de MATLAB o Java).

**Eliminación.** Secuencia de operaciones de filas que reduce  $A$  a una matriz triangular superior  $U$  o a la forma reducida  $R = \text{rref}(A)$ . Entonces  $A = LU$  con los multiplicadores  $l_{ij}$  en  $L$ , o  $PA = LU$  con intercambios entre filas en  $P$ , o  $EA = R$  siendo  $E$  una matriz invertible.

**Elipse (o elipsoide)**  $x^T A x = 1$ .  $A$  tiene que ser una matriz definida positiva; los ejes de la elipse son vectores propios de  $A$ , con longitudes  $1/\sqrt{\lambda}$ . (Para  $\|x\| = 1$  los vectores  $y = Ax$  se sitúan en la elipse  $\|A^{-1}y\|^2 = y^T (AA^T)^{-1} y = 1$  que crea el código *eigshow*; longitud de los ejes =  $\sigma_i$ .)

**Espacio de columnas de  $C(A)$ .** Espacio de todas las combinaciones de las columnas de  $A$ .

**Espacio de filas  $C(A^T)$**  = todas las combinaciones de las filas de  $A$ . Vectores de columna por convenio.

**Espacio nulo  $N(A)$**  = Soluciones para  $Ax = 0$ . Dimensión  $n - r$  = (# columnas) - rango.

**Espacio nulo por la izquierda  $N(A^T)$ .** Espacio nulo de  $A^T$  = "espacio nulo por la izquierda" de  $A$  porque  $y^T A = 0^T$ .

**Espacio vectorial  $V$ .** Conjunto de vectores tal que todas las combinaciones  $cv + dw$  permanecen en  $V$ . En la sección 3.1 aparecen ocho reglas obligatorias para  $cv + dw$ .

**Espectro de  $A$**  = conjunto de autovalores  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . **Radio espectral** =  $|\lambda_{\max}|$ .

**Exponencial  $e^{At} = I + At + (At)^2/2! + \dots$**  tiene como derivada  $Ae^{At}$ ;  $e^{At}u(0)$  resuelve  $u' = Au$ .

**Factorización de Cholesky.**  $A = CC^T = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T$  para una matriz definida positiva  $A$ .

**Factorización  $LU$ .** Si la eliminación conduce a  $U$  a partir de  $A$  **sin intercambios de filas**, la triangular inferior  $L$  con los multiplicadores  $\lambda_{ij}$  (y  $\lambda_{ii} = 1$ ) convierte a  $U$  de nuevo en  $A$ .

**Factorizaciones simétricas  $A = LDL^T$  y  $A = QAQ^T$ .** El número de pivotes positivos en  $D$  y de autovalores positivos en  $A$  es el mismo.

**Forma de Jordan  $J = M^{-1}AM$ .** Si  $A$  tiene  $s$  autovectores independientes, su matriz "generalizada" de autovectores  $M$  da  $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s)$ . El bloque  $J_k$  es  $\lambda_k I_k + N_k$ , donde todos los elementos de la diagonal 1 de  $N_k$  son unos. Cada bloque tiene un autovalor  $\lambda_k$  y un autovector  $(1, 0, \dots, 0)$ .

**Forma escalonada reducida por filas**  $R = \text{rref}(A)$ . Pivotes = 1; ceros por encima y por debajo de los pivotes;  $r$  filas distintas de cero de  $R$  conforman una base para el espacio de filas de  $A$ .

**Fórmula extendida para determinantes de  $n$  por  $n$** .  $\text{Det}(A)$  es una suma de  $n!$  elementos, uno por cada permutación  $P$  de las columnas. Ese elemento es el producto de  $a_{1\alpha}, \dots, a_{n\omega}$  de arriba abajo de la diagonal de la matriz reordenada, alternativamente  $\text{det}(P) = \pm 1$ .

**Giro parcial (Partial pivoting)**. En una eliminación, se elige como  $j$ -ésimo pivote al elemento disponible con un valor absoluto más alto de la columna  $j$ . Entonces, en todos los multiplicadores  $|l_{ij}| \leq 1$ . El error redondeado (redondeo del error) está controlado (depende del condicionamiento de  $A$ ).

**Grafo**  $G$ . Conjunto de  $n$  nodos conectados por  $m$  aristas dos a dos. Un **grafo completo** tiene todas las aristas  $n(n-1)/2$  entre sus nodos. Un **árbol** sólo tiene  $n-1$  aristas y no contiene ciclos. En un **grafo dirigido**, cada arista tiene una flecha de dirección.

**Inversa de una matriz  $A^{-1}$** . Matriz cuadrada de modo que  $A^{-1}A = I$  y  $AA^{-1} = I$ . No existe la inversa si  $\det A = 0$ ,  $\text{rang}(A) < n$  y  $Ax = 0$  para un vector  $x$  distinto de cero. Las inversas de  $AB$  y  $A^T$  son  $B^{-1}A^{-1}$  y  $(A^{-1})^T$ . Método de desarrollo por cofactores (**cofactor formula**)  $(A^{-1})_{ij} = C_{ji}/\det A$ .

**Inversa por la derecha  $A^+$** . Si el rango de filas de  $A$  es  $m$ , entonces en  $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$  se cumple que  $AA^+ = I_m$ .

**Inversa por la izquierda  $A^+$** . Si  $A$  tiene un rango de columnas  $n$ , entonces para  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  se da que  $A^+ A = I_n$ .

**Leyes de Kirchhoff**. *Ley de corrientes*: la suma algebraica (entrada menos salida) de las corrientes que entran a cualquier nodo es cero. *Ley de voltajes*: Las diferencias de potencial (caídas de tensión) en cualquier recorrido cerrado suman cero.

**Longitud  $\|x\|$** . Raíz cuadrada de  $x^T x$  (Pitágoras en  $n$  dimensiones).

**Matrices conmutables  $AB = BA$** . Si son diagonalizables, comparten  $n$  autovectores.

**Matrices semejantes  $A$  y  $B$** . Toda  $B = M^{-1}AM$  tiene los mismos autovalores que  $A$ .

**Matriz adjunta**. Poniendo  $c_1, \dots, c_n$  en la fila  $n$  y los unos de la fila  $n-1$  en la diagonal 1, obtenemos que  $\det(A - \lambda I) = \pm(c_1 + c_2 \lambda + c_3 \lambda^2 + \dots + K)$ .

**Matriz adyacente de un grafo**. Matriz cuadrada con  $a_{ij} = 1$  cuando hay una arista que une el vértice  $i$  con el vértice  $j$ ; si no,  $a_{ij} = 0$ .  $A = A^T$  para un grafo no dirigido.

**Matriz aleatoria  $\text{rand}(n)$  o  $\text{randn}(n)$** . MATLAB crea una matriz con elementos aleatorios, con una distribución uniforme en  $[0, 1]$  en el caso de  $\text{rand}$ , y con una distribución normal estándar en el caso de  $\text{randn}$ .

**Matriz antisimétrica  $K$** . La transpuesta es  $-K$ , ya que  $K_{ij} = -K_{ji}$ . Los autovalores son imaginarios puros, los autovectores son ortogonales,  $e^{Kt}$  es una matriz ortogonal.

**Matriz aumentada  $[A \ b]$** .  $Ax = b$  es resoluble cuando  $b$  se encuentra en el espacio de columnas de  $A$ ; entonces  $[A \ b]$  es del mismo rango que  $A$ . Al realizar la eliminación en  $[A \ b]$  las ecuaciones siguen siendo correctas.

**Matriz circulante**  $C$ . Las diagonales constantes se agrupan en torno a ella como si fueran traslaciones cíclicas (*cyclic shifts*)  $S$ . Todas las circulantes son  $C_0I + C_1S + \dots + C_{n-1}S^{n-1}$ .  $Cx = \text{convolución } c * x$ . Autovectores en  $F$ .

**Matriz covarianza**  $\Sigma$ . Cuando un grupo de variables aleatorias  $x_i$  tiene una media = valor medio = 0, sus covarianzas  $\Sigma_{ij}$  son las medias de  $x_i x_j$ . Con medias  $\bar{x}_i$ , la matriz  $\Sigma = \text{media de } (x - \bar{x})(x - \bar{x})^T$  es una (semi)definida positiva; será diagonal si las  $x_i$  son independientes.

**Matriz de cambio de base**  $M$ . Los vectores  $v_j$  de la antigua base son combinaciones  $\sum m_{ij} w_i$  de los vectores de la nueva base. La relación entre las coordenadas de  $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = d_1 w_1 + \dots + d_n w_n$  viene dada por  $d = Mc$ . (Para  $n = 2$  tenemos que  $v_1 = m_{11} w_1 + m_{21} w_2$ ,  $v_2 = m_{12} w_1 + m_{22} w_2$ .)

**Matriz de Fourier**  $F$ . Los elementos  $F_{jk} = e^{2\pi i jk/n}$  producen columnas ortogonales  $\bar{F}^T F = nI$ . Entonces  $y = Fc$  es la transformada discreta de Fourier (inversa)  $y_j = \sum c_k e^{2\pi i jk/n}$ .

**Matriz de Hankel**  $H$ . Constante a lo largo de todas las antidiagonales;  $h_{ij}$  depende de  $i + j$ .

**Matriz de Hessenberg**  $H$ . Matriz triangular con una diagonal adyacente adicional distinta de cero.

**Matriz de Hilbert**  $\text{hilb}(n)$ . Elementos  $H_{ij} = 1 / \int_0^1 (i + j - 1) x^{i-1} x^{j-1} dx$ . Definida positiva, pero con un  $\lambda_{\min}$  extremadamente pequeña y un condicionamiento alto.

**Matriz de incidencia de un grafo dirigido**. La matriz de incidencia arista-nodo de  $m$  por  $n$  tiene una fila por cada arista (nodo  $i$  a nodo  $j$ ), con los elementos  $-1$  y  $1$  en las columnas  $i$  y  $j$ .

**Matriz de Markov**  $M$ . Todos los  $m_{ij} \geq 0$  y la suma de cada una de las columnas es 1. Mayor autovalor  $\lambda = 1$ . Si  $m_{ij} > 0$ , las columnas de  $M^k$  se aproximan al autovector estático/ estacionario (**steady state eigenvector**)  $Ms = s > 0$ .

**Matriz de Pascal**  $PS = \text{pascal}(n)$ . Matriz simétrica con elementos binomiales  $\binom{i+j-2}{i-1}$ .  $PS = P_L P_U$  contienen todas el triángulo de Pascal con  $\det = 1$  (véase index para más propiedades).

**Matriz de permutación**  $P$ . Existen  $n!$  permutaciones de  $1, \dots, n$ ; cada una de las  $n!$  permutaciones de  $P$  tiene las filas de  $I$  en el orden correspondiente a dicha permutación.  $PA$  pone las filas de  $A$  en ese mismo orden.  $P$  es producto de los intercambios de filas  $P_{ij}$ ;  $P$  será par o impar ( $\det P = 1$  ó  $-1$ ) dependiendo del número de intercambios.

**Matriz de proyección**  $P$  sobre un subespacio  $S$ . La proyección  $p = Pb$  es el punto más cercano a  $b$  en  $S$ , el error  $e = b - Pb$  es perpendicular a  $S$ .  $P^2 = P = P^T$ , los autovalores son 1 ó 0, los autovectores están contenidos en  $S$  o  $S^\perp$ . Si las columnas de  $A = \text{bases de } S$ , entonces  $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ .

**Matriz de rango uno**  $A = uv^T \neq 0$ . Los espacios de filas y columnas = rectas  $cu$  y  $cv$ .

**Matriz de reflexión**  $Q = I - 2uu^T$ . El vector unidad  $u$  se refleja en  $Qu = -u$ . Todos los vectores  $x$  del plano especular  $u^T x = 0$  permanecen invariables, porque  $Qx = x$ . En la "matriz de Householder"  $Q^T = Q^{-1} = Q$ .

**Matriz de rigidez**  $K$ .  $x$  da los movimientos de los nodos en una estructura discreta, mientras que  $Kx$  da las fuerzas internas. A menudo  $K = A^T C A$ , donde  $C$  contiene las constantes del muelle de la ley de Hooke y  $Ax =$  los alargamientos (deformaciones) derivados de los movimientos  $x$ .

**Matriz de rotación**  $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  rota el plano en  $\theta$  y  $R^{-1} = R^T$  lo rota al revés en  $-\theta$ . Matriz ortogonal, autovalores  $e^{i\theta}$  y  $e^{-i\theta}$ , autovectores  $(1, \pm i)$ .

**Matriz de Toeplitz**  $T$ . Matriz (de) diagonal constante (**constant-diagonal matrix**), de modo que sólo depende de  $j - i$ . Las matrices de Toeplitz, en el procesamiento de señales, representan filtros que no varían con el tiempo.

**Matriz de Vandermonde**  $V$ .  $Vc = b$  da el polinomio  $p(x) = c_0 + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$  con  $p(x_i) = b_i$  en los puntos  $n$ .  $V_{ij} = (x_i)^{j-1}$  y  $\det V =$  producto de  $(x_k - x_i)$  para  $k > i$ .

**Matriz definida positiva**  $A$ . Matriz simétrica con autovalores y pivotes positivos. Definición:  $x^T A x > 0$ , a menos que  $x = 0$ .

**Matriz diagonal**  $D$ .  $d_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . **Diagonal por bloques:** ceros fuera de los bloques cuadrados  $D_{ii}$ .

**Matriz diagonalizable**  $A$ . Tiene que tener  $n$  autovectores independientes (en las columnas de  $S$ ; con lo cual automáticamente tiene  $n$  autovalores diferentes). Así que  $S^{-1}AS = \Lambda =$  matriz de autovalores.

**Matriz de eliminación (elimination matrix)** = **matriz elemental**  $E_{ij}$ . Matriz identidad con un  $-\lambda_{ij}$  adicional en el elemento  $i, j$  ( $i \neq j$ ). Entonces, en  $E_{ij}A$ , se resta  $\lambda_{ij}$  veces la fila  $j$  de  $A$  de la fila  $i$ .

**Matriz escalonada**  $U$ . El primer elemento distinto de cero (pivote) de cada fila va después del pivote de la fila anterior. Todas las filas de ceros van al final.

**Matriz espacio nulo (null space matrix)**  $N$ . Las columnas de  $N$  son las soluciones especiales  $n - r$  para  $As = 0$ .

**Matriz hermitiana**  $A^H = \overline{A}^T = A$ . Análoga compleja de una matriz simétrica:  $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$ .

**Matriz hipercúbica**  $P_L^2$ . La fila  $n + 1$  cuenta vértices, aristas, caras, etc. de un cubo contenido en  $\mathbf{R}^n$ .  $P_L^2$

**Matriz identidad**  $I$  (o  $I_n$ ). Elementos sobre la diagonal = 1, elementos fuera de la diagonal = 0.

**Matriz indefinida**. Matriz simétrica con autovalores de ambos signos (+ y -).

**Matriz nilpotente**  $N$ . Alguna potencia de  $N$  es la matriz cero,  $N^k = 0$ . El único autovalor es  $\lambda = 0$  (repetido  $n$  veces). Ejemplos: matrices triangulares con diagonal cero.

**Matriz normal**  $N$ .  $NN^T = N^T N$ , produce autovectores ortonormales (complejos).

**Matriz ortogonal**  $Q$ . Matriz cuadrada con columnas ortonormales, de modo que  $Q^T Q = I$  implica  $Q^T = Q^{-1}$ . Conserva las longitudes y los ángulos,  $\|Qx\| = \|x\|$  y  $(Qx)^T(Qy) = x^T y$ . Todo  $|\lambda| = 1$ , con autovectores ortogonales. Ejemplos: Rotación, reflexión, permutación.

**Matriz por bloques**. Una matriz se puede dividir en bloques, mediante particiones entre sus filas y/o sus columnas. La **multiplicación por bloques** de  $AB$  es posible cuando las formas de los mismos lo permiten (las columnas de  $A$  y las filas de  $B$  deben ser del mismo tamaño).

**Matriz semidefinida**  $A$ . Una semidefinida (positiva) es una matriz simétrica con  $x^T Ax > 0$  para todos los vectores  $x$ . Así, todos los autovalores  $\lambda \geq 0$ . Carece de pivotes negativos.

**Matriz simétrica**  $A$ . La transpuesta es  $A^T = A$ , y  $a_{ij} = a_{ji}$ .  $A^{-1}$  también es simétrica. Todas las matrices de las formas  $R^T R$ ,  $LDL^T$  y  $QAQ^T$  son simétricas. Para todas las matrices simétricas, los autovalores de  $A$  son reales y los autovectores de  $Q$  son ortonormales.

**Matriz singular**  $A$ . Matriz cuadrada que no tiene inversa:  $\det(A) = 0$ .

**Matriz transpuesta**  $A^T$ . Los elementos  $A_{ij}^T = A_{ji}$ .  $A^T$  es de  $n$  por  $m$ ,  $A^T A$  es cuadrada, simétrica y semidefinida positiva. Las transpuestas de  $AB$  y  $A^{-1}$  son  $B^T A^T$  y  $(A^T)^{-1}$ .

**Matriz tridiagonal**  $T$ .  $t_{ij} = 0$  si  $|i - j| > 1$ .  $T^{-1}$  es de rango 1 por encima y por debajo de la diagonal.

**Matriz unitaria**  $U^H = \bar{U}^T = U^{-1}$ . Columnas ortonormales (análoga compleja de  $Q$ ).

**Método de direcciones conjugadas**. Secuencia de pasos (explicada al final del capítulo 9) conducentes a la resolución de una definida positiva  $Ax = b$ , minimizando  $\frac{1}{2} x^T Ax - x^T b$  en subespacios de Krylov cada vez mayores.

**Método de Gauss-Jordan**. Consiste en invertir  $A$  por medio de operaciones en las filas de  $[A \ I]$  para obtener  $[I \ A^{-1}]$ .

**Método iterativo**. Secuencia de pasos encaminada a aproximarse a la solución deseada.

**Método simplex de programación lineal**. El vector de coste mínimo (**minimum cost vector**)  $x^*$  se halla desplazándose sucesivamente de un vértice a otro que mejore el anterior a través de las aristas de una figura factible (cuando se cumplen las restricciones  $Ax = b$  y  $x > 0$ ). El coste mínimo se halla en un vértice.

**Multiplicación**  $Ax = x_1(\text{columna } 1) + \dots + x_n(\text{columna } n) = \text{combinación de columnas}$ .

**Multiplicación de matrices**  $AB$ . El elemento  $i, j$  de  $AB$  es igual a (fila  $i$  de  $A$ )  $\cdot$  (columna  $j$  de  $B$ ) =  $\sum a_{ik} b_{kj}$ . Por columnas: Columna  $j$  de  $AB = A$  veces la columna  $j$  de  $B$ . Por filas: la fila  $i$  de  $A$  multiplica a  $B$ . Filas por columnas:  $AB = \text{suma de (columna } k)(\text{fila } k)$ . Todas estas definiciones equivalentes surgen de la regla de que  $AB$  por  $x$  es igual a  $A$  por  $Bx$ .

**Multiplicador**  $\lambda_{ij}$ . La fila pivote  $j$  se multiplica por  $\lambda_{ij}$  y se resta de la fila  $i$  para eliminar el elemento  $i, j$ :  $\lambda_{ij} = (\text{elemento que se quiere eliminar}) / (j\text{-ésimo pivote})$ .

**Multiplicidades**  $AM$  y  $GM$ . La multiplicidad algebraica  $AM$  de un autovalor  $A$  es el número de veces que aparece  $A$  como raíz de  $\det(A - \lambda I) = 0$ . La multiplicidad geométrica  $GM$  es el número de autovectores independientes (= dimensión del espacio propio de  $\lambda$ ).

**Norma  $\|A\|$  de una matriz**. La “norma  $l^2$ ” es la ratio máxima  $\|Ax\|/\|x\| = \sigma_{\max}$ . Entonces  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$  y  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  y  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ . **Norma de Frobenius**  $\|A\|_F^2 = \sum \sum a_{ij}^2$ ; las normas  $l^1$  y  $l^\infty$  las sumas mayores de filas y columnas de  $|a_{ij}|$ .

**Números de Fibonacci.**  $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$  cumplen  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = (\lambda_1^n - \lambda_2^n)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ . La tasa de crecimiento  $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$  es el mayor autovalor de la matriz de Fibonacci  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Números de Lucas.**  $L_n = 2, 1, 3, 4, \dots$  cumplen  $L_n = L_{n-1} + L_{n-2} = \lambda_1^n + \lambda_2^n$ , con los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2 = (1 \pm \sqrt{5})/2$  de la matriz de Fibonacci  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Compárese  $L_0 = 2$  con Fibonacci.

**Ondas (Wavelets)  $w_{jk}(t)$  o vectores  $w_{jk}$ .** Deforman y trasladan el eje de tiempos para dar lugar a  $w_{jk}(t) = w_{00}(2^j t - k)$ . Los vectores procedentes de  $w_{00} = (1, 1, -1, -1)$  serán  $(1, -1, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1, -1)$ .

**Ortogonalización de Gram-Schmidt para  $A = QR$ .** Columnas independientes en  $A$ , columnas ortonormales en  $Q$ . Cada una de las columnas  $q_j$  de  $Q$  es una combinación de las  $j$  primeras columnas de  $A$  (y viceversa, de modo que  $R$  es triangular superior). Por convenio:  $\text{diag}(R) > 0$ .

**Pivote  $d$ .** El elemento de la diagonal (el primero distinto de cero) cuando se trabaja con una fila al realizar un proceso de eliminación.

**Plano (o hiperplano) en  $\mathbf{R}^n$ .** Las soluciones de  $a^T x = 0$  definen el plano (dimensión  $n - 1$ ) perpendicular a  $a \neq 0$ .

**Polinomio mínimo de  $A$ .** El polinomio de grado más bajo para que  $m(A) =$  matriz cero. Las raíces de  $m$  son autovalores, y  $m(\lambda)$  divide a  $\det(A - \lambda I)$ .

**Producto de Kronecker (producto tensor)  $A \otimes B$ .** Bloques  $a_{ij}B$ , autovalores  $\lambda_p(A)\lambda_q(B)$ .

**Producto escalar  $x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .** El producto escalar complejo es  $\bar{x}^T y$ . Al realizar el producto escalar de vectores perpendiculares, el resultado es cero.  $(AB)_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$ .

**Producto exterior  $uv^T =$  columna por fila = matriz de rango uno.**

**Producto vectorial  $u \times v$  en  $\mathbf{R}^3$ .** Vector perpendicular a  $u$  y  $v$ , cuya longitud  $\|u\| \|v\| (\text{sen } \theta) =$  área del paralelogramo, calculada como el “determinante” de  $[\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}; u_1 \ u_2 \ u_3; v_1 \ v_2 \ v_3]$ .

**Propiedad asociativa  $(AB)C = A(BC)$ .** Se pueden eliminar los paréntesis para dejar  $ABC$ .

**Propiedad distributiva  $A(B + C) = AB + AC$ .** Se puede sumar primero y luego multiplicar, o multiplicar primero y luego sumar.

**Proyección de  $p = a (a^T b / a^T a)$  sobre la recta que atraviesa  $a$ .**  $P = aa^T / a^T a$  es de rango 1.

**Pseudoinversa  $A^+$  (inversa de Moore-Penrose).** Matriz de  $n$  por  $m$  que “invierte” a  $A$ , de modo que de espacio de columnas pasa de nuevo a espacio de filas, siendo  $N(A^+) = N(A^T)$ .  $A^+ A$  y  $AA^+$  son las matrices de proyección sobre el espacio de filas y el espacio de columnas.  $\text{Rang}(A^+) = \text{rang}(A)$ .

**Punto singular de  $f(x_1, \dots, x_n)$ .** Un punto donde las primeras derivadas de  $f$  dan cero y la matriz de la segunda derivada ( $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j =$  **matriz Hessiana**) no tiene un valor definido.

**Rango  $r(A) =$  número de pivotes = dimensión del espacio de columnas = dimensión del espacio de filas.**

**Rango de columnas  $r = n$ .** Columnas independientes,  $N(A) = \{0\}$ , no hay variables libres.

**Rango de filas  $r = m$ .** Filas independientes, al menos una solución para  $Ax = b$ , el espacio de columnas abarca la totalidad de  $\mathbf{R}^m$ . Por “rango de la matriz” se entiende rango de filas o rango de columnas.

**Red Grafo dirigido** con las constantes  $c_1, \dots, c_m$  asociadas a sus aristas.

**Regla de Cramer para  $Ax = b$ .**  $B_j$  es la matriz  $A$ , en la que se ha sustituido la columna  $j$  por el vector  $b$ ,

$$\text{y } x_j = \frac{|B_j|}{|A|}.$$

**Representación de columnas (Column picture) de  $Ax = b$ .** El vector  $b$  se convierte en una combinación de las columnas de  $A$ . El sistema sólo tiene solución cuando  $b$  se encuentra en el espacio de columnas de  $C(A)$ .

**Representación de filas (row picture) de  $Ax = b$ .** Cada ecuación produce un plano en  $\mathbf{R}^n$ ; éstos tienen su intersección en  $x$ .

**Resolución por mínimos cuadrados  $\hat{x}$ .** El vector  $\hat{x}$ , que minimiza el error  $\|e\|^2$ , resuelve  $A^T A \hat{x} = A^T b$ .

Entonces  $e = b - A \hat{x}$  es ortogonal para todas las columnas de  $A$ .

**Sistema resoluble  $Ax = b$ .** La parte derecha,  $b$ , pertenece al espacio de columnas de  $A$ .

**Solución completa  $x = x_p + x_n$  para  $Ax = b$ .** ( $x_p$  concreta) + ( $x_n$  en el espacio nulo).

**Solución particular (concreta?)  $x_p$ .** Cualquier solución para  $Ax = b$ ; a menudo las variables libres de  $x_p$  son = 0.

**Soluciones especiales para  $As = 0$ .** Una de las variables libres es  $s_i = 1$ , las otras son = 0.

**Subespacio  $S$  de  $V$ .** Cualquier espacio vectorial contenido en  $V$ , incluidos  $V$  y  $Z = \{\text{vector cero}\}$ .

**Subespacio de Krylov  $K_j(A, b)$ .** Subespacio expandido hasta  $b, Ab, \dots, A^{j-1}b$ . Los métodos numéricos aproximan  $A^{-1}b$  a  $x_j$  con una  $b - Ax_j$  residual en este subespacio. Para establecer una buena base para  $K_j$  sólo hay que multiplicar por  $A$  en cada paso.

**Subespacios ortogonales.** Todo  $v$  de  $V$  es ortogonal a todo  $w$  de  $W$ .

**Suma de subespacios  $V + W$ .** Espacio de toda ( $v$  en  $V$ ) + ( $w$  en  $W$ ). **Suma directa:**  $\dim(V + W) = \dim V + \dim W$  cuando  $V$  y  $W$  sólo comparten el vector cero.

**Sustitución hacia atrás.** Los sistemas triangulares superiores se resuelven en orden inverso, de  $x_n$  a  $x_1$ .

**Teorema de Cayley-Hamilton.**  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  con  $p(A) = \text{matriz cero}$ .

**Teorema espectral  $A = Q\Lambda Q^T$ .** La matriz simétrica real  $A$  tiene una  $\lambda_i$  real y una  $q_i$  ortonormal, de modo que  $Aq_i = \lambda_i q_i$ . En mecánica,  $q_i$  da los *ejes principales*.

**Teorema fundamental.** El espacio nulo  $N(A)$  y el espacio de filas  $C(A^T)$  son complementos ortogonales (espacios perpendiculares de  $\mathbf{R}^n$  de dimensiones  $r$  y  $n - r$ ) con respecto de  $Ax = 0$ . Si se aplica a  $A^T$ , el espacio de columnas  $C(A)$  es el complemento ortogonal de  $N(A^T)$ .

**Transformación afín.**  $T(v) = Av + v_0 =$  transformación lineal más desplazamiento.

**Transformación lineal  $T$ .** Cada uno de los vectores  $v$  del espacio de entrada se transforma en  $T(v)$  en el espacio de salida, y la linealidad exige que  $T(cv + dw) = cT(v) + dT(w)$ . Ejemplos: multiplicación de matrices  $Av$ , diferenciación en el espacio de funciones.

**Transformada rápida de Fourier (FFT).** Factorización de la matriz de Fourier  $F_n$  en matrices  $l = \log_2 n$ , realizando la permutación  $S_i$  veces. Para cada  $S_i$  sólo hacen falta  $n/2$  multiplicaciones, así que  $F_n x$  y  $F_n^{-1} c$  se pueden calcular con sólo  $nl/2$  multiplicaciones. Revolucionario.

**Traslación cíclica (cyclic shift)  $S$ .** Permutación con  $s_{2l} = 1, s_{3l} = 1, \dots, s_{1n} = 1$ . Sus autovalores son raíces enésimas  $e^{2\pi ik/n}$  de 1; sus autovectores son columnas de la matriz de Fourier  $F$ .

**Traza de  $A$**  = suma de los elementos de la diagonal = suma de los autovalores de  $A$ .  $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$ .

**Variable libre  $x_i$** . La columna  $i$  queda sin pivote en la eliminación. Podemos dar cualquier valor a las variables libres  $n - r$ , entonces  $Ax = b$  determina las variables pivote  $r$  (¡si es resoluble!).

**Vector  $v$  en  $\mathbf{R}^n$** . Secuencia de  $n$  números reales  $v = (v_1, \dots, v_n) =$  punto en  $\mathbf{R}^n$ .

**Vectores independientes  $v_1, \dots, v_k$** . Ninguna combinación  $c_1v_1 + \dots + c_kv_k =$  vector cero, a menos que todos los  $c_i = 0$ . Si las  $v$ es son las columnas de  $A$ , la única solución para  $Ax = 0$  es  $x = 0$ .

**Vectores ortonormales  $q_1, \dots, q_n$** . Los productos escalares son  $q_i^T q_j = 0$  si  $i \neq j$  y  $q_i^T q_i = 1$ . En la matriz  $Q$  con éstas columnas ortonormales se cumple que  $Q^T Q = I$ . Si  $m = n$ , entonces  $Q^T = Q^{-1}$  y  $q_1, \dots, q_n$  es una **base ortonormal** para  $\mathbf{R}^n$ : cada  $v = \sum (v^T q_j) q_j$ .

**Volumen del paralelepípedo**. Las filas (o columnas) de  $A$  generan un paralelepípedo de volumen  $|\det(A)|$ .