8. INVERSION DE FOURIER

Hemos demostrado más arriba que la transformada de Fourier cumple la identidad

$$(8.1) \qquad \varphi(0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Si $y \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ se define $\psi(x) = \varphi(x + y)$. La invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue demuestra que

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x+y)\, dx \\ &= e^{iy\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\,.\end{aligned}$$

Aplicada a ψ la fórmula de la inversión (8.1) pasa a ser

$$(8.2) \qquad \begin{aligned}\varphi(y) = \psi(0) &= (2\pi)^{-n} \int \hat{\psi}(\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi\,.\end{aligned}$$

Teorema 8.1. *La transformada de Fourier* $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ *es un isomorfismo con inverso:*

$$(8.3) \qquad \mathcal{G} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \mathcal{G}\psi(y) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\xi}\psi(\xi)\, d\xi\,.$$

Prueba. La identidad (8.2) muestra que $\mathcal{F}$ es 1 – 1; es decir, inyectiva, puesto que no podemos retirar φ de $\hat{\varphi}$. Además,

$$(8.4) \qquad \mathcal{G}\psi(y) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\psi(-y)$$

Por lo que *Ì* es también una correlación lineal continua, *Ì :* $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$. El argumento anterior demuestra que *Ì*∘$\mathcal{F}$ = *Id* y el mismo argumento demuestra también, con algunos cambios de signo, que $\mathcal{F}$ · *Ì* = *Id.* Luego $\mathcal{F}$ y *Ì* son isomorfismos.

Lema 8.2. *Para todo* $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ *se mantiene la identidad de Paseval:*

$$(8.5) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi}\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}\, d\xi\,.$$

Prueba. Utilizando la fórmula de inversión en φ,

$$\begin{aligned}\int \varphi\overline{\psi}\,dx &= (2\pi)^{-n}\int \left(e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right)\overline{\psi}(x)\,dx \\ &= (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}(\xi)\overline{\int e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)\,dx}\,d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\varphi}}(\xi)\,d\xi\,.\end{aligned}$$

Aquí las integrales son absolutamente convergentes, lo que justifica el cambio de órdenes.

Proposición 8.3. *La transformada de Fourier se extiende a un isomorfismo*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)\,. \tag{8.6}$$

Prueba. Al fijar $\varphi = \psi$ en (8.5) se demuestra que

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|\varphi\|_{L^2}\,. \tag{8.7}$$

Lo que prueba, concretamente, que dada la densidad conocida de $S(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo, con un inverso Ì, como en (8.6).

Para cualquier $m \in \mathbb{R}$

$$\langle x\rangle^m L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\ \langle x\rangle^{-m}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

es un sub-espacio bien definido. Para $m \geq 0$ definimos los *espacios de Sobolev* en $\mathbb{R}^n$ mediante

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n)\,;\ \hat{u} = \mathcal{F}u \in \langle\xi\rangle^{-m}L^2(\mathbb{R}^n)\right\}\,. \tag{8.8}$$

Por tanto,

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset H^{m'}(\mathbb{R}^n) \text{ if } m \geq m'\,,\ H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Lema 8.4. *Si $m \in \mathbb{N}$ es un número entero,*

$$u \in H^m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \forall \ |\alpha| \leq m\,. \tag{8.9}$$

Prueba. Por definición, $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ implica que $\langle\xi\rangle^{-m}\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dado que

$$\widehat{D^\alpha u} \ = \ \xi^\alpha \hat{u}$$

ello implica que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq m$. A la inversa, si $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$ entonces $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\langle\xi\rangle^m \leq C_m \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|\ .$$

lo que a su vez implica que $\xi^m\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ahora que hemos visto la transformada de Fourier de las funciones test de Schwartz podemos emplear el método habitual (el de la dualidad) para extenderla a distribuciones temperadas. Si fijamos $\eta = \overline{\hat{\psi}}$, entonces $\hat{\psi} = {}^-\eta$ y $\psi = Ì\hat{\psi} = Ì\,{}^-\eta$, luego

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\cdot\xi}\overline{\hat{\psi}}(\xi)\, d\xi \\ = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\cdot\xi}\eta(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n}\hat{\eta}(x).\end{aligned}$$

Sustituyendo en (8.5), obtenemos

$$\int \varphi\hat{\eta}\, dx = \int \hat{\varphi}\eta\, d\xi\ .$$

Definición 8.5. *Cuando $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformada de Fourier mediante*

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) \ \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{8.11}$$

Como correlación continua $\hat{u} = u \cdot \mathcal{F}$, $\hat{u}$ es continua con cada término continuo; es decir, $\hat{u} \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 8.6. *De la definición* (8.7) *obtenemos un isomorfismo*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,,\ \ \mathcal{F}u = \hat{u}$$

que satisface las identidades

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha u\,,\ \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}\,. \tag{8.12}$$

Prueba. Dado que $\hat{u} = u \circ \mathcal{F}$ y $\grave{I}$ es inversa en ambos lados de $\mathcal{F}$,

$$u = \hat{u} \circ \mathcal{G} \tag{8.13}$$

nos da la inversa a $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, lo que demuestra que es un isomorfismo. Las identidades (8.12) se derivan de sus contrapartidas en $S(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha u}(\varphi) &= D^\alpha u(\hat{\varphi}) = u((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\varphi}) \\ &= u(\widehat{\xi^\alpha \varphi}) = \hat{u}(\xi^\alpha \varphi) = \xi^\alpha \hat{u}(\varphi) \ \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.\end{aligned}$$

Asimismo podemos definir los espacios de Sobolev de orden *negativo*:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\, \hat{u} \in \langle\xi\rangle^{-m} L^2(\mathbb{R}^n)\right\}\ . \tag{8.14}$$

Proposición 8.7. *If* $m \leq 0$ *es un número entero, entonces* $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ *si, y solamente si, se puede escribir en la forma*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq -m} D^\alpha v_\alpha\,,\ v_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)\,. \tag{8.15}$$

Prueba. Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ es de la forma (8.15), entonces

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq -m} \xi^\alpha \hat{v}_\alpha \text{ con } \hat{v}\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)\,. \tag{8.16}$$

Por consiguiente,

$$\langle\xi\rangle^m \hat{u} \ = \ \sum\nolimits_{|\alpha| \leq -m} \xi^\alpha \langle\xi\rangle^m \hat{v}_\alpha.$$

Dado que todos los factores $\xi^\alpha\langle\xi\rangle^m$ son acotados, cada término aquí se halla en $L^2(\mathbb{R}^n)$, luego $\langle\xi\rangle^m\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ que es la definición, $u \in \langle\xi\rangle^{-m} L^2(\mathbb{R}^n)$.

A la inversa, supongamos $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\langle\xi\rangle^m \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La función

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq -m} |\xi^\alpha|\right) \cdot \langle\xi\rangle^m \in L^2(\mathbb{R}^n) \ (m < 0)$$

es acotada por debajo por una constante positiva. Por consiguiente,

$$v = \left(\sum_{|\alpha|\leq -m} |\xi^\alpha|\right)^{-1} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Cada una de las funciones $\hat{v}_\alpha = \operatorname{sgn}\xi^\alpha \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ luego la identidad (8.16), y por tanto la (8.15) se desprenden de estos resultados.

Proposición 8.8. *Cada uno de los espacios de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con la norma y el producto interior*

$$\|u\|_{H^m} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2m}\, d\xi\right)^{1/2}, \tag{8.17}$$

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\langle\xi\rangle^{2m}\, d\xi\,.$$

El espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ es denso para cada m y el par

$$H^m(\mathbb{R}^n) \times H^{-m}(\mathbb{R}^n) \ni (u, u') \longmapsto \tag{8.18}$$

$$((u, u')) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u'}(\xi)\hat{u'}(\cdot\xi)\, d\xi \in \mathbb{C}$$

da una identificación $H^m(\mathbb{R}^n))' = H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. La propiedad del espacio de Hilbert se desprende directamente esencialmente de la definición (8.14) dado que $\langle\xi\rangle^{-m}L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con la norma (8.17). Del mismo modo se desprende la densidad de S en $H^m(\mathbb{R}^n)$, ya que al ser $S(\mathbb{R}^n)$ denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Problema L11.P3), ello implica que $\langle\xi\rangle^{-m} S(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\langle\xi\rangle^{-m}L^2(\mathbb{R}^n)$ y por tanto, como $\mathcal{F}$ es un isomorfismo en $S(\mathbb{R}^n)$, $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Observemos, por último, que el par en (8.18) tiene sentido, puesto que $\langle\xi\rangle^{-m}\hat{u}(\xi)$, $\langle\xi\rangle^{m}\hat{u}'(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica

$$\hat{u}(\xi))\hat{u'}(-\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)\,.$$

Además, por la propia dualidad de $L^2(\mathbb{R}^n)$ cada funcional lineal continuo

$$U : H^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\,,\, U(u) \leq C\|u\|_{H^m}$$

únicamente se puede escribir en la forma

$$U(u) = ((u, u')) \text{ para algún } u' \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Observemos que si $u,\ u' \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$((u, u')) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)u'(x)\,dx\,.$$

Esta es siempre la manera en que "emparejamos" funciones: se trata del par natural en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, lo que hemos demostrado en (8.18) es que este emparejamiento en la función test

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni (u, u') \longmapsto ((u, u')) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)u'(x)\,dx$$

se extiende por *continuidad* a $H^m(\mathbb{R}^n)$ x $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ (para cada valor fijado de m) cuando identifica $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ como el dual de $H^m(\mathbb{R}^n)$. Este era el "cuadro" del que hemos partido.

Para $m > 0$ el espacio $H^m(\mathbb{R}^n)$ representa elementos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ que tienen "m" derivadas en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para $m < 0$ los elementos son (??) de derivadas "hasta $-m$" de funciones L^2 . ¿Es esto precisamente para números enteros??