4. ESPACIO DE HILBERT

Hemos demostrado que $L^p(X, \mu)$ es un espacio de Banach; un espacio normado completo. Comenzamos a continuación la clase sobre los espacios de Hilbert, un tipo particular de espacios de Banach de los que $L^2(X, \mu)$ es un ejemplo típico, y en los que la norma proviene de un producto interior, tal y como ocurre en el espacio euclídeo.

Un producto interior en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ (también se puede hacer el supuesto real, ya que no hay muchos cambios) es una forma sesquilineal

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

escrita como (u, v), si $u, v \in V$. La parte sesquilineal implica linealidad en la primera variable

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2 \, , \, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v), \tag{4.1}$$

antilinealidad en la segunda

$$(u, a_1 v_1 + a_2 v_2) = \overline{a}_1(u, v_1) + \overline{a}_2(u, v_2) \tag{4.2}$$

y la condición de conjugación

$$(u, v) = \overline{(v, u)} \, . \tag{4.3}$$

Haga avanzar el texto para acceder a más contenidos

Hay que tener en cuenta que (4.2) se deriva de (4.1) y (4.3). Si además suponemos la condición de positividad[8]

$$(4.4) \qquad (u,u) \geq 0\,,\ (u,u)=0 \Rightarrow u=0\,,$$

tenemos entonces que

$$(4.5) \qquad \|u\| = (u,u)^{1/2}$$

es una norma en V, tal y como veremos más adelante.

Supongamos que $u, v \in V$ tienen $\|u\| = \|v\| = 1$. Entonces $(u, v) = e^{i\theta}\,|(u,v)|$ para algunos $0 \in \mathbb{R}$. Dado que θ, $e^{i\theta}(u,v) = |(u,v)|$ es real, luego expandiendo y utilizando la linearidad para $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (e^{-i\theta}u - sv\,,\, e^{-i\theta}u - sv) \\ &= \|u\|^2 - 2s\,\mathrm{Re}\, e^{-i\theta}(u,v) + s^2\|v\|^2 = 1 - 2s|(u,v)| + s^2. \end{aligned}$$

En este caso el mínimo se produce cuando $s = |(u,v)|$ y su valor es negativo a menos que I $|(u,v)| \leq 1$. Aplicando la linealidad, y comprobando los casos triviales $u =$ ó $v = 0$ prueba que

$$(4.6) \qquad |(u,v)| \leq \|u\|\,\|v\|,\ \forall\ u,v \in V\,.$$

Esto se conoce como desigualdad de Schwarz[9]. Aplicándola:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + (u,v) + (v,u) + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Longrightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|\ \forall\ u,v \in V \end{aligned}$$

que es la desigualdad triangular.

Definición 4.1. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial V con un producto interior que cumple con* (4.1) – (4.4) *lo cual es completo como espacio normado* (*es decir, es un espacio de Banach*).

Ya hemos demostrado que $L^2(\mathrm{X}, \mu)$ es un espacio de Hilbert para cualquier medida positiva μ. El producto interior es

$$(4.7) \qquad (f,g) = \int_X f\overline{g}\,d\mu\,,$$

por lo que de (4.3) obtenemos $\|f\|_2$.

Otra identidad importante válida para todos los espacios de producto interior es la ley del

---

[8] Obsérvese que (u,u) es real por (4.3).

[9] Schwarz sin "t" en este caso.

paralelogramo:

$$(4.8) \qquad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 .$$

Lo anterior sirve para probar el "teorema de la existencia" de la teoría de espacios de Hilbert.

Lema 4.2. *Sea $C \subset H$, en un espacio de Hilbert, abierto y convexo (es decir, $su + (1-s)\, v \in C$ si $u,v \in C$ y $0 < s < 1$). Luego C contiene un elemento único de la norma más pequeña.*

Prueba. Podemos elegir una secuencia $u_n \in C$ tal que

$$\|u_n\| \to \delta = \inf\{\|v\| \, ; \, v \in C\} .$$

Por la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= 2\|u_n\|^2 + 2\|u_m\|^2 - \|u_n + u_m\|^2 \\ &\leq 2(\|u_n\|^2 + \|u_m\|^2) - 4\delta^2 \end{aligned}$$

donde empleamos el hecho de que $(u_n + u_m)/2 \in C$ por lo que deberemos tener normado al menos δ. Por tanto $\{u_n\}$ es una secuencia de Cauchy, que será convergente por la completitud que se presume en H. Por consiguiente lim $u_n = u \in C$ (ya que se supone que es cerrado) y por la desigualdad triangular

$$|\|u_n\| - \|u\|| \leq \|u_n - u\| \to 0$$

Luego $\|u\| = \delta$. La unicidad de u se desprende una vez más de la ley del paralelogramo, que demuestra que si $\|u'\| = \delta$:

$$\|u - u'\| \leq 2\delta^2 - 4\|(u + u')/2\|^2 \leq 0 .$$

El dato fundamental sobre un espacio de Hilbert es que cada elemento $v \in H$ defina un funcional lineal continuo mediante

$$H \ni u \longmapsto (u, v) \in \mathbb{C}$$

y, a la inversa, *cada* funcional lineal continua se crea de esta manera.

Proposición 4.3. *Si $L : H \to C$ es una funcional lineal continua en un espacio de Hilbert, será entonces un elemento único $v \in H$ tal que*

$$(4.9) \qquad Lu = (u, v) \ \forall \ u \in H ,$$

Prueba. Consideremos el espacio lineal

$$M = \{u \in H \, ; \, Lu = 0\}$$

como el espacio nulo de L, una funcional lineal continua en H. Por la continuidad que hemos supuesto, M es cerrado. Podemos suponer que L no es idénticamente cero (ya que, entonces, $v = 0$ en (4.9)). Por tanto, existirá $w \notin M$.

Consideremos

$$w+M=\{v\in H\,;\,v=w+u\,,\,u\in M\}\ .$$

Se trata de un subconjunto convexo y cerrado de H. Aplicando el lema 4.2, tiene un único elemento más pequeño, $v \in w + M$. Dado que v minimiza la norma en $w + M$,

$$\|v+su\|^2=\|v\|^2+2\,\mathrm{Re}(su,v)+\|s\|^2\|u\|^2$$

es estacionario en $s = 0$. Consiguientemente, Re $(u, v) = 0\ \forall\ u \in M$, y el mismo argumento sustituyendo s por is demuestra que $(v, u) = 0\ \forall\ u \in M$.

Ahora tenemos $v \in w + M$, luego $L_v = L_w \neq 0$. Consideremos el elemento $w' = w/L_w \in H$. Dado que $Lw' = 1$, para cualquier $u \in H$

$$L(u-(Lu)w')=Lu-Lu=0\ .$$

De donde resulta que $u- (L_u)w' \in M$ por lo que si $w'' = w'/\|w'\|^2$

$$(u,w'')=((Lu)w',w'')=Lu\frac{(w',w')}{\|w'\|^2}=Lu\ .$$

La unicidad de v se desprende del carácter positivo de la norma.

Corolario 4.4. *Para cualquier medida positiva μ, toda funcional lineal continua*

$$L:L^2(X,\mu)\rightarrow\mathbb{C}$$

es de la forma

$$Lf=\int_X f\overline{g}\,d\mu\ ,\ \ g\in L^2(X,\mu)\ .$$

Obsérvese la evidente fuerza del "razonamiento abstracto" en este caso. Aunque da la impresión de que hemos construido g de la nada, su existencia se deriva de la *completitud* de $L^2(X, \mu)$, aunque resulta muy conveniente expresar el argumento de forma abstracta para un espacio general de Hilbert.