5. FUNCIONES TEST

Hasta el momento hemos tratado principalmente la integración. Una de las nociones que hemos aprendido es que, partiendo de espacios duales, podemos considerar las funciones como funcionales. Analicemos esta idea brevemente.

Consideremos la bola unidad en $\mathbb{R}^n$

$$\overline{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, |x| \leq 1\} \; .$$

Elegiré la bola unidad *cerrada* porque me interesa tratar con un espacio métrico compacto. Ya nos hemos encontrado con varios espacios de Banach de funciones en $\overline{\mathbb{B}^n}$ por ejemplo:

$$C(\overline{\mathbb{B}^n}) = \{u : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{C} \, ; \quad u \text{ continua}\}$$

$$L^2(\overline{\mathbb{B}^n}) = \left\{u : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{C}; \quad \text{medible según Borel con} \quad \int |u|^2 \, dx < \infty\right\}$$

Haga avanzar el texto para acceder a más contenidos

De aquí en adelante, *dx* es una medida de Lebesgue y las funciones se identifican cuando son iguales casi en su totalidad.

Dado que $\overline{\mathbb{B}^n}$ es compacto, tenemos una inclusión natural

$$C(\overline{\mathbb{B}^n}) \hookrightarrow L^2(\overline{\mathbb{B}^n})\,. \tag{5.1}$$

Lo que es también una inclusión topológica; es decir, es una correlación lineal acotada, ya que

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_\infty \tag{5.2}$$

donde C^2 es el volumen de la bola unidad. En general, cuando tenemos una definición de este tipo:

Lema 5.1. *Si $V \hookrightarrow U$ es un subespacio con una norma más fuerte,*

$$\|\varphi\|_U \leq C\|\varphi\|_V \;\forall\; \varphi \in V$$

la restricción nos proporciona una correlación lineal continua

$$U' \to V',\; U' \ni L \longmapsto \tilde{L} = L|_V \in V',\;\; \|\tilde{L}\|_{V'} \leq C\|L\|_{U'}\,. \tag{5.3}$$

Si V es denso en U entonces la correlación (5.3) *es inyectiva*.

Prueba. Por definición de la norma dual

$$\begin{aligned}\|\tilde{L}\|_{V'} &= \sup\left\{\left|\tilde{L}(v)\right|\;;\;\|v\|_V \leq 1\,,\; v \in V\right\}\\ &\leq \sup\left\{\left|\tilde{L}(v)\right|\;;\;\|v\|_U \leq C\,,\; v \in V\right\}\\ &\leq \sup\left\{|L(u)|\;;\;\|u\|_U \leq C\,,\; u \in U\right\}\\ &= C\|L\|_{U'}\,.\end{aligned}$$

Si $V \subset U$ es denso, entonces la anulación de $L : U \to \mathbb{C}$ en V implica su anulación en U.

Volviendo al caso concreto (5.1) resulta evidente que necesitamos obtener una correlación continua entre los espacios duales.

$$L^2(\overline{\mathbb{B}^n}) \cong (L^2(\overline{\mathbb{B}^n}))' \to (C(\overline{\mathbb{B}^n}))' = M(\overline{\mathbb{B}^n})\,.$$

Aquí utilizaremos el teorema de la representación de Riesz y la dualidad para espacios de Hilbert. Se supone que la correlación aplicada aquí es lineal, no antilineal; es decir,

$$L^2(\overline{\mathbb{B}^n}) \ni g \longmapsto \int \cdot g\, dx \in (C(\overline{\mathbb{B}^n}))'\,. \tag{5.4}$$

La idea es hacer que el espacio de "funciones test" sea lo más razonablemente pequeño posible, manteniendo a la vez la *densidad* en espacios igualmente razonables.

Recordemos que una función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *es diferenciable* en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ cuando existe $a \in$

$\mathbb{C}^n$ tal que

$$|u(x) - u(\overline{x}) - a \cdot (x - \overline{x})| = o(|x - \overline{x}|)\,. \tag{5.5}$$

El símbolo "o minúscula" significa aquí que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ sujeto a

$$|x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(\overline{x}) - a(x - \overline{x})| < \epsilon\, |x - \overline{x}|\,.$$

Los coeficientes de $a = (a_1, \ldots, a_n)$ son las derivadas parciales de u en $\overline{x}$,

$$a_i = \frac{\partial u}{\partial x_j}(\overline{x})$$

ya que

$$a_i = \lim_{t \to 0} \frac{u(\overline{x} + te_i) - u(\overline{x})}{t}\,, \tag{5.6}$$

siendo $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ el i-ésimo vector base. Se dice que la función u es *continuamente diferenciable* en $\mathbb{R}^n$ cuando en *cada* punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y cada una de las derivadas parciales n son continuas,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,. \tag{5.7}$$

Definición 5.2. *Sea* C_0^1 $(\mathbb{R}^n)$ *el subespacio de*

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$$

tal que cada conjunto C_0^1 $(\mathbb{R}^n)$ *es continuamente diferenciable y*

$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, j = 1,…,n.

Proposición 5.3. *La función*

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_\infty$$

es *una norma en* C_0^1 $(\mathbb{R}^n)$ *con respecto a la que es un espacio de Banach.*

Prueba. Que $\|\ \|_C{}^1$ es una norma se desprende de las propiedades de $\|\ \|_\infty$. A saber,

$\|u\|_C{}^1 = 0$ implica que $u = 0$, $\|au\|_C{}^1 = |a|\ \|u\|_C{}^1$ y la desigualdad triangular se desprende de la misma desigualdad para $\|\ \|_\infty$.

Del mismo modo, en parte la completitud de $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ se desprende de la completitud de $C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Si $\{u_n\}$ es una secuencia de Cauchy en $C_0^1(\mathbb{R}^n)$; entonces u_n y $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ son Cauchy en $C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Se desprende que existen límites de estas secuencias,

$$u_n \to v\,,\ \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to v_j \in C_0^0(\mathbb{R}^n)\,.$$

No obstante, debemos comprobar que v es continuamente diferenciable y que $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ $= v_j$

Una forma de hacerlo es aplicando el teorema fundamental de cálculo a cada variable. Tendríamos

$$u_n(\overline{x} + te_i) = \int_0^t \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(\overline{x} + se_i)\,ds + u_n(\overline{x})\,.$$

A medida que $n \to \infty$ todos los términos convergen y, por lo tanto, por la continuidad de la integral,

$$u(\overline{x} + te_i) = \int_0^t v_j(\overline{x} + se_i)\,ds + u(\overline{x})\,.$$

Lo que demuestra que el límite de (5.6) existe y, consiguientemente, $v_i\,(\overline{x})$ es la derivada parcial de u con respecto a x_i. Solamente nos queda por demostrar que u es diferenciable en cada punto; pero esto es algo que dejo pendiente para el Problema 17.

De este modo, casi por definición, tenemos un ejemplo del Lema 5.1, $C_0^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Se trata de un concepto ciertamente denso, pero por el momento no voy a molestarme en demostrarlo. Sabemos que

$$(C_0^0(\mathbb{R}^n))' \to (C_0^1(\mathbb{R}^n))'$$

y suponemos que se trata de una función inyectiva. Por lo tanto, hay *más* funcionales en $C_0^1(\mathbb{R}^n)$, entre ellas ciertas cosas que son "más originales que las medidas". Un ejemplo de ello guarda relación con el delta de Dirac

$$\delta(\overline{x})(u) = u(\overline{x})\,,\ u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)\,,$$

es decir,

$$\delta(\overline{x})(u) = u(\overline{x}) \, , \; u \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n) \, ,$$

Se trata evidentemente de una funcional lineal continua, lo que no hace más que indicar $\frac{\partial}{\partial xj}$ $\delta(\bar{x})$.

Claro que, ¿por qué detenernos en una derivada?

Definición 5.4. *El espacio*

$$\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n) \; k \geq 1$$

viene definido inductivamene por el requisito de que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{C}_0^{k-1}(\mathbb{R}^n) \, , \; j = 1, \ldots, n \, .$$

Se toma la norma en $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *para que sea*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k} = \|u\|_{\mathcal{C}^{k-1}} + \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{\mathcal{C}^{k-1}} \, . \tag{5.8}$$

Todos estos son espacios de Banach, ya que si $\{u_n\}$ es Cauchy en $C_0^k(\mathbb{R}^n)$, es una secuencia de Cauchy y de ahí que sea convergente en $C_0^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, como lo es en $\frac{\partial}{\partial xj}$, j = 1,...,$n$–1. Además, los límites de $\frac{\partial}{\partial xj}$ son, por la Proposición 5.3, las derivadas de los límites.

De ello obtenemos una secuencia de espacios que se van haciendo cada vez más uniformes

$$\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n) \supset \cdots \supset \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) \supset \cdots \, ,$$

con normas crecientemente amplias. A su vez, podemos esperar también que los duales vayan haciéndose mayores proporcionalmente al incremento de k.

Además de fijarnos en la uniformidad creciente de las funciones, debemos tener en cuenta la "infinidad", dado que $\mathbb{R}^n$ no es compacto. Observe que un elemento $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ define (con respecto a una medida de Lebesgue por defecto) una funcional en C_0^0 $(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, en *todos* los $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, una función del tipo de la función constante 1 *no* es integrable en $\mathbb{R}^n$. Como esta cuestión, y los polinomios, es precisamente lo que nos interesa, tendremos en cuenta una segunda condición de *pequeñez en la infinitud*. Fijemos

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2} \tag{5.9}$$

una función que tiene el tamaño de $|x|$ por $|x|$, y que tiene la propiedad de ser uniforme[10].

Definición 5.5. *Para cualquier conjunto k, l* $\in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$

$$\langle x\rangle^{-l}\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\,;\, u = \langle x\rangle^{-l}v\,,\ v \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\right\}\ ,$$

con norma,

$$\|u\|_{k,l} = \|v\|_{\mathcal{C}^k}\ ,\ v = \langle x\rangle^l u.$$

Hay que tener en cuenta que la definición simplemente dice que $u = \langle x\rangle^{-l}v$, con $v \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. De ello se deduce inmediatamente que $\langle x\rangle^{-l}v$ es un espacio de Banach con esta norma.

Definición 5.6. *El espacio "Schwartz"*[11] *de las funciones test en* $\mathbb{R}^n$ *es*

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; u \in \langle x\rangle^{-l} C_0^k\ (\mathbb{R}^n)\, para\cdot todo\cdot k\cdot y\cdot l \in \mathbb{N}\right\}$$

A primera vista no se aprecia que este espacio sea no vacío (tenemos 0, pero no basta…), eso que

$$\exp(-\,|x|^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es el Problema 19.

La idea de Schwartz es que el dual de $S(\mathbb{R}^n)$ debería contener todos los objetos "interesantes", al menos aquellos que mostraran un "crecimiento polinómico". El problema es que *no* disponemos de una norma en $S(\mathbb{R}^n)$, sino que tenemos un *gran número* de ellas. Obsérvese que

$$\langle x\rangle^{-l}\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) \subset \langle x\rangle^{-l'}\mathcal{C}_0^{k'}(\mathbb{R}^n)$$

si $l \geq l'$ y $k \geq k'$.

De esta manera lo contemplamos como un espacio lineal.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_k \langle x\rangle^{-k}\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\,. \tag{5.10}$$

Como estos espacios se están haciendo más pequeños, tenemos un número de normas contablemente infinito. Por ello se dice que $S(\mathbb{R}^n)$ es un espacio *contablemente normado*.

Proposición 5.7. *Para* $u \in S(\mathbb{R}^n)$, *se fija*

$$\|u\|_{(k)} = \|\langle x\rangle^k u\|_{\mathcal{C}^k} \tag{5.11}$$

---

[10] Véase Problema 18.

[11] Laurent Schwartz, esta vez con "t".

y se define

$$(5.12) \qquad d(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|u-v\|_{(k)}}{1+\|u-v\|_{(k)}}\,,$$

entonces d es una función de distancia en $S(\mathbb{R}^n)$ *con respecto a la cual es un espacio métrico completo*.

Prueba. La serie en (5.12) converge, ya que

$$\frac{\|u-v\|_{(k)}}{1+\|u-v\|_{(k)}} \leq 1\,.$$

Las dos primeras condiciones de una métrica son claras,

$$d(u,v) = 0 \;\Rightarrow\; \|u-v\|_{\mathcal{C}_0} = 0 \Rightarrow u = v,$$

y la simetría es inmediata. Quizás la desigualdad triangular encierra más misterios.

En realidad basta con probar que

$$(5.13) \qquad \tilde{d}(u,v) = \frac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|}$$

es una métrica en cualquier espacio normado, ya que entonces podemos sumar a *k*. Consideraremos por tanto

$$\frac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|} + \frac{\|v-w\|}{1+\|v-w\|} = \frac{\|u-v\|(1+\|v-w\|)+\|v-w\|(1+\|u-v\|)}{(1+\|u-v\|)(1+\|v-w\|)}\,.$$

Comparando esto con $\check{d}(v,w)$ deberemos demostrar que

$$\begin{aligned}&(1+\|u-v\|)(1+\|v-w\|)\|u-w\| \\ &\quad \leq (\|u-v\|(1+\|v-w\|)+\|v-w\|(1+\|u-v\|))(1+\|u-w\|)\,.\end{aligned}$$

Partiendo del lado izquierdo (LHS) hacia el derecho (RHS) y aplicando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS} &\leq \|u-w\| + (\|u-v\|+\|v-w\|+\|u-v\|\,\|v-w\|)\|u-w\| \\ &\leq (\|u-v\|+\|v-w\|+\|u-v\|\,\|v-w\|)(1+\|u-w\|) \\ &\leq \mathrm{RHS}\,.\end{aligned}$$

De donde se deduce que *d* es una métrica

Supongamos que u_n es una secuencia de Cauchy. Tendríamos $d(u_n, u_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. En particular, dado

$$\epsilon > 0 \; \exists \; N \text{ s.t. } n, m > N$$

implica que

$$d(u_n, u_m) < \epsilon 2^{-k} \; \forall \; n, m > N.$$

Los términos de (5.12) son todos ellos positivos, por lo que

$$\frac{\|u_n - u_m\|_{(k)}}{1 + \|u_n - u_m\|_{(k)}} < \epsilon \; \forall \; n, m > N \, .$$

Si $\varepsilon < 1/2$ ello implica a su vez que

$$\|u_n - u_m\|_{(k)} < 2\epsilon \, ,$$

luego la secuencia es Cauchy en $\langle x \rangle^{-k} C_0^k(\mathbb{R}^n)$. De la completitud de estos espacios se desprende que $u_n \to u$ en $\langle x \rangle^{-k} C_0^k(\mathbb{R}^n)_j$ para cada k. Dado $\varepsilon > 0$ escogeremos un valor de k lo bastante grande como para que 2–k < $\varepsilon/2$. Entonces $\exists$ N tal que. $n > N$

$$\Rightarrow \|u - u_n\|_{(j)} < \epsilon/2 \; n > N \, , \; j \leq k \, .$$

Por consiguiente

$$d(u_n, u) = \sum_{j \leq k} 2^{-j} \frac{\|u - u_n\|_{(j)}}{1 + \|u - u_n\|_{(j)}}$$

$$+ \sum_{j > k} 2^{-j} \frac{\|u - u_n\|_{(j)}}{1 + \|u - u_n\|_{(j)}}$$

$$\leq \epsilon/4 + 2^{-k} < \epsilon \, .$$

Esta $u_n \to u$ en $S(\mathbb{R}^n)$.
Aquí vendría la explicación de $C_c(\mathrm{R}^n)$.