

## 9. INMERSION DE TRAZAS DE SOBOLEV

Más arriba ya hemos tratado brevemente las propiedades de los espacios de Sobolev. Si  $m$  es un número entero positivo, entonces  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$  "significa" que  $u$  tiene hasta  $m$  derivadas en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . La cuestión que se plantea es en qué sentido estas derivadas "débiles" se corresponden con las derivadas "fuertes" tradicionales. Naturalmente, cuando  $m$  no es un entero positivo resulta algo más difícil imaginar en qué consisten estas "derivadas fraccionarias". No obstante, el principal resultado es:

Haga avanzar el texto para acceder a más contenidos

**Teorema 9.1.** (Inmersión de trazas de Sobolev). Si  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$  siendo  $m > n/2$  entonces  $u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ ; es decir

$$(9.1) \quad H^m(\mathbb{R}^n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^n), \quad m > n/2.$$

*Prueba.* Por definición,  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$  significa que  $v \in S(\mathbb{R}^n)$  y  $\langle \xi \rangle^m \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Supongamos primero que  $u \in S(\mathbb{R}^n)$ . La fórmula de inversión de Fourier demuestra que

$$(2\pi)^n |u(x)| = \left| \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \right| \\ \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-2m} d\xi \right)^{1/2}.$$

Si  $m > n/2$ , la segunda integral será finita. Como la primera integral es la norma en  $H^m(\mathbb{R}^n)$ , tenemos

$$(9.2) \quad \sup_{\mathbb{R}^n} |u(x)| = \|u\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n} \|u\|_{H^m}, \quad m > n/2.$$

Esto es todo por lo que respecta a  $u \in S(\mathbb{R}^n)$ , pero  $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$  es denso. (9.2) muestra que si  $u_j \rightarrow u$  en  $H^m(\mathbb{R}^n)$ , con  $u_j \in S(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $u_j \rightarrow u$  en  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ . En realidad,  $u_j \rightarrow u$  en  $S(\mathbb{R}^n)$ , ya que  $u_j \rightarrow u$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $u_j \rightarrow u$  en  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$  ambos implican que  $\int u_j \varphi$  converge, luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_j \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u' \varphi \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Aquí observamos el significado exacto de  $u = u'$ ,  $u \in H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $u' \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ . Al identificar  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  con la distribución temperada correspondiente, los valores de cualquier conjunto de medida cero "se pierden". De ahí que las "funciones" en (9.1) signifiquen que cada  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$  tiene un  $u' \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$  representativo.

Podemos extender esto a derivadas de orden superior mediante la

**Proposición 9.2.** Si  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , entonces  $D^\alpha u \in H^{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$  y

$$(9.3) \quad D^\alpha : H^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$$

es continua.

*Prueba.* Basta con demostrar que  $D_j$  define una correlación lineal continua

$$(9.4) \quad D_j : H^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{m-1}(\mathbb{R}^n) \quad \forall j$$

desde donde (9.3) se obtiene por composición.

Si  $m \in \mathbb{R}$ , entonces  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$  significa que  $\hat{u} \in \langle \xi \rangle^{-m} L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dado  $\widehat{D_j u} =$  que

$\xi_j \hat{u}, y$

$$|\xi_j| \langle \xi \rangle^{-m} \leq C_m \langle \xi \rangle^{-m+1} \quad \forall m$$

concluimos que  $D_j u \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|D_j u\|_{H^{m-1}} \leq C_m \|u\|_{H^m}.$$

Aplicando este resultado tenemos

**Corolario 9.3.** Si  $k \in \mathbb{N}_0$  y  $m > \frac{n}{2} + k$ , entonces

$$(9.5) \quad H^m(\mathbb{R}^n) \subset C_0^k(\mathbb{R}^n).$$

*Prueba.* Si  $|\alpha| \leq k$ , luego

$$D^\alpha u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

De donde resulta que las "derivadas débiles"  $D^\alpha u$  son continuas. Nos falta por comprobar que lo anterior significa que  $u$  es en sí continuamente diferenciable  $k$  veces. Lo que de hecho resulta otra vez de la densidad de  $S(\mathbb{R}^n)$  en  $H^m(\mathbb{R}^n)$ . La continuidad en (9.3) implica que si  $u_j \rightarrow u$  en  $H^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $m > \frac{n}{2} + k$ , luego  $u_j \rightarrow u'$  en  $C_0^k(\mathbb{R}^n)$  (utilizando su completitud).

Sin embargo, al igual que antes,  $u = u'$ , luego  $u \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ .

En particular, observamos que

$$(9.6) \quad H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_m H^m(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Estas funciones no son en general funciones test de Schwartz.

**Proposición 9.4.** El espacio de Schwartz se puede expresar en términos de espacios de Sobolev con pesos

$$(9.7) \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_k \langle x \rangle^{-k} H^k(\mathbb{R}^n).$$

*Prueba.* Esta expresión se deriva directamente de (9.5) ya que la parte izquierda de la misma se halla contenida en

$$\bigcap_k \langle x \rangle^{-k} C_0^{k-n}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**Teorema 9.5.** (Representación de Schwartz). Toda distribución temperada puede expresarse en forma de una suma finita.

$$(9.8) \quad u = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} x^\alpha D_x^\beta u_{\alpha\beta}, \quad u_{\alpha\beta} \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

o en la forma

$$(9.9) \quad u = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} D_x^\beta (x^\alpha v_{\alpha\beta}), \quad v_{\alpha\beta} \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Por tanto, toda distribución temperada es una suma finita de derivadas de funciones continuas de crecimiento polinomial.

*Prueba.* Esencialmente por definición, cualquier  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  es continua con respecto a una de las normas  $\|\langle x \rangle^k \varphi\|_C^k$ . Del teorema de la inmersión de trazas de Sobolev deducimos que, con  $m > k + n/2$ ,

$$|u(\varphi)| \leq C \|\langle x \rangle^k \varphi\|_{H^m} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Que es lo mismo que

$$|\langle x \rangle^{-k} u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H^m} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

lo que demuestra que  $\langle x \rangle^{k-1} u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ ; es decir, que a partir de la Proposición 8.8,

$$\langle x \rangle^{-k} u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_\alpha, \quad u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

De hecho, escogemos  $j > n/2$  y consideramos  $v_a \in H^j(\mathbb{R}^n)$  definido por  $\hat{v}_a = \langle \xi \rangle^{-j} \hat{u}_a$ . Al igual que en la prueba de la Proposición 8.14 llegamos a la conclusión de que:

$$u_\alpha = \sum_{|\beta| \leq j} D^\beta u'_{\alpha,\beta}, \quad u'_{\alpha,\beta} \in H^j(\mathbb{R}^n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Por consiguiente<sup>17</sup>,

$$(9.10) \quad u = \langle x \rangle^k \sum_{|\gamma| \leq M} D^\gamma v_\gamma, \quad v_\gamma \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Para obtener (9.9) "conmutamos" el factor  $\langle x \rangle^k$  al interior; no he preparado del todo este argumento hasta ahora, por lo que permítanme que lo presente como un lema.

**Lema 9.6.** Para cualquier  $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$  existen polinomios  $p_{\alpha\gamma}(x)$  de grados  $|\gamma - \alpha|$  como máximo tales que

$$\langle x \rangle^k D^\gamma v = \sum_{\alpha \leq \gamma} D^{\gamma-\alpha} (p_{\alpha,\gamma} \langle x \rangle^{k-2|\gamma-\alpha|} v).$$

*Prueba.* Conviene probar un resultado más general. Supongamos que  $p$  es un polinomio de grado máximo  $j$ ; existirán entonces polinomios de grados máximos  $j + |\gamma - \alpha|$  tales que

<sup>17</sup> Esta es posiblemente la forma más útil del teorema de representación.

$$(9.11) \quad p\langle x \rangle^k D^\gamma v = \sum_{\alpha \leq \gamma} D^{\gamma-\alpha} (p_{\alpha, \gamma} \langle x \rangle^{k-2|\gamma-\alpha|} v).$$

De aquí derivamos el lema tomando como valor  $p = 1$ .

Por otra parte, la identidad (9.11) resulta trivial cuando  $\gamma = 0$ , y procediendo por inducción podemos suponer que es conocido siempre que  $|\gamma| \leq L$ . Tomando  $|\gamma| = L + 1$ ,

$$D^\gamma = D_j D^{\gamma'} \quad |\gamma'| = L.$$

Escribiendo la identidad para  $\gamma'$  como

$$p\langle x \rangle^k D^{\gamma'} = \sum_{\alpha' \leq \gamma'} D^{\gamma'-\alpha'} (p_{\alpha', \gamma'} \langle x \rangle^{k-2|\gamma'-\alpha'|} v)$$

podemos diferenciar con respecto a  $x_j$ , obteniendo

$$\begin{aligned} p\langle x \rangle^k D^\gamma &= -D_j(p\langle x \rangle^k) \cdot D^{\gamma'} v \\ &+ \sum_{|\alpha'| \leq \gamma'} D^{\gamma'-\alpha'} (p'_{\alpha', \gamma'} \langle x \rangle^{k-2|\gamma'-\alpha'|+2} v). \end{aligned}$$

El primer término de la derecha se expande a

$$(-(D_j p) \cdot \langle x \rangle^k D^{\gamma'} v - \frac{1}{i} k p x_j \langle x \rangle^{k-2} D^{\gamma'} v).$$

Podemos aplicar la hipótesis inductiva a cada uno de estos términos y describir el resultado en la forma (9.11); sólo es necesario comprobar el orden de los polinomios y no olvidar que  $\langle x \rangle^2$  es un polinomio de grado 2.

Aplicando el Lema 9.6 a (9.10) obtenemos (9.9), una vez absorbidas en las funciones continuas las potencias negativas de  $\langle x \rangle$ . Y a continuación, obtenemos (9.8) a partir de (9.9) y la fórmula de Leibniz.