## 3. INTEGRACION

La ($\mu$)-integral de una función simple no negativa es, por definición:

$$\int_Y f\,d\mu = \sum_i a_i \mu(Y \cap E_i)\,,\ Y \in \mathcal{M}\,. \tag{3.1}$$

En este caso se sigue la convención de que si $\mu(Y \cap E_i) = \infty$ pero como $a_i = 0$ entonces $a_i \mu(Y \cap E_i) = 0$. Evidentemente, esta integral toma valores en $[0, \infty]$. Aún más, cuando $c \geq 0$ es una constante y $f$ y $g$ son dos funciones simples no negativas ($\mu$-medibles) tenemos que

$$\begin{gathered} \int_Y cf d\mu = c\int_Y f d\mu \\ \int_Y (f+g)d\mu = \int_Y f d\mu + \int_Y g d\mu \\ 0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_Y f\,d\mu \leq \int_Y g\,d\mu\,. \end{gathered} \tag{3.2}$$

(Véase [1] Proposición 2.13 en la página 48.)

Para ver esto, hay que tener en cuenta que (3.1) es válido para *cualquier* presentación (2.14) de $f$ con todo $a_i \geq 0$. De hecho, limitándolo a $E_i$ y dividiéndolo por $a_i$ (lo que podemos suponer como distinto de cero) nos basta para considerar el supuesto especial

$$\chi_E = \sum_j b_j \chi_{F_j}.$$

$F_j$ puede formularse siempre como la unión de un número finito, $N'$, de conjuntos medibles disjuntos, $F_j = \cup_{l \in S_j} G_l$ donde $j = 1, \ldots, N$ y $S_j \subset \{1, \ldots, N'\}$. Por lo tanto,

$$\sum_j b_j \mu(F_j) = \sum_j b_j \sum_{l \in S_j} \mu(G_l) = \mu(E)$$

ya que $\sum_{\{j; l \in S_j\}} b_j = 1$ para cada $j$.

A partir de esta idea resulta fácil seguir el resto de expresiones.

**Definición 3.1.** *Para una función ampliada no negativa y $\mu$-medible $f : X \to [0, \infty]$ la integral (con respecto a $\mu$) sobre cualquier conjunto medible $E \subset X$ es*

$$\int_E f d\mu = \sup\{\int_E h d\mu;\ 0 \leq h \leq f,\quad h \textit{ simple y medible}\}. \tag{3.3}$$

Al tomar la suprema, $\int_E f d\mu$ tiene las propiedades primera y última de (3.2). También tiene la propiedad central, aunque ésta es menos evidente. Para poder captar esta idea deberemos probar una noción básica: el "teorema de la convergencia monótona" (de Lebesgue). Antes, sin embargo, es preciso fijarse en qué significa la anulación del valor de la integral.

**Lema 3.2.** *Si $f : X \to [0, \infty]$ es medible, tendremos*:

$$\int_E f d\mu = 0$$

*para un conjunto medible E si y sólo si*

$$(3.4) \qquad \{x \in E; f(x) > 0\} \text{ tiene una medida igual a cero.}$$

*Prueba.* Si (3.4) es válido, toda función simple positiva acotada superiormente por $f$ deberá también perder valor cuando es externa a un conjunto de medida igual a cero, luego su integral deberá ser cero y, por lo tanto, $\int_E f d\mu = 0$.

A la inversa, observe que el conjunto que se halla en (3.4) puede formularse como

$$E_n = \bigcup_n \{x \in E; f(x) > 1/n\}.$$

Dado que estos conjuntos se incrementan, si (3.4) no es válido, uno de ellos deberá tener medida positiva. En tal caso, la función simple $n^{-1}\chi_{E_n}$ tendrá integral positiva, luego

$$\int_E f d\mu > 0.$$

Observe la diferencia fundamental de enfoque existente entre la integral de Riemann y la de Lebesgue. La de Lebesgue (3.3) utiliza una aproximación por funciones constante en conjuntos medibles susceptibles de causar dificultades; a diferencia de las integrales superiores e inferiores de Riemann, que utilizan simplemente intervalos.

**Teorema 3.3** (Convergencia monótona). *Sea $f_n$ una secuencia creciente de funciones medibles no negativas (ampliadas),con lo que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es medible y*

$$(3.5) \qquad \int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

*para cualquier conjunto medible $E \subset X$.*

*Prueba.* Para comprobar que $f$ es medible, es preciso fijarse en que

$$(3.6) \qquad f^{-1}(a, \infty] = \bigcup_n f_n^{-1}(a, \infty].$$

Los conjuntos $(a, \infty]$ generan la σ-álgebra de Borel, lo que demuestra que *f es* medible.

A continuación pasaremos a probar la parte central de la proposición (3.5). Rudin ha planteado una demostración bastante acertada [5] página 21 que paso a explicar. Partiendo de (3.1) vemos claramente que

$$\alpha = \sup \int_E f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Dada una función simple medible $g$ en la que $0 \leq g \leq f$ y $0 < c < 1$; fijémonos en los conjuntos $E_n = \{x \in E; f_n(x) \geq cg(x)\}$. Son medibles y se incrementan a medida que lo hace $n$. Si, además, tenemos en cuenta que $E = \bigcup_n E_n$, resulta:

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} g d\mu = \sum_i a_i \mu(E_n \cap F_i) \tag{3.7}$$

en términos de la representación natural de $g = \sum_i a_i \chi F_i$. El hecho de que $E_n$ sean medibles y se incrementen hasta $E$ demuestra que

$$\mu(E_n \cap F_i) \to \mu(E \cap F_i)$$

a medida que $n \to \infty$. Por lo tanto, el lado derecho de (3.7) tiende a $c\int_E g d\mu$ a medida $n \to \infty$. Así tenemos:

$$\alpha \geq c \int_E g d\mu$$

para todo $0 < c < 1$. Aplicando el supremo a $c$ y a continuación a todo $g$ queda probado que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq \sup \int_E g d\mu = \int_E f d\mu.$$

Por lo tanto, todos ellos deben ser iguales.

Si tomamos, por ejemplo, la aditividad en (3.1) para $f > 0$ y $g > 0$ vemos que todas las funciones medibles se derivan de

**Proposición 3.4.** *Para cualquier función ampliada μ-medible y no negativa* $f : X \to [0, \infty]$ *existe una secuencia creciente* $f_n$ *de funciones simples medibles tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para cada* $x \in X$, *siendo este límite uniforme en cada conjunto medible en el que f sea finita.*

*Prueba.* Folland ([1], página 45) propone una prueba convincente. Para cada entero $n > 0$ y $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$, se define

$$E_{n,k} = \{x \in X; 2^{-n}k \leq f(x) < 2^{-n}(k+1)\},$$
$$E'_n = \{x \in X; f(x) \geq 2^n\}.$$

Estos son conjuntos medibles. Al aumentar $n$ en una unidad, el intervalo en la definición de $E_{n,k}$ queda dividido por dos. De ello se desprende que la secuencia de funciones simples

$$f_n = \sum_k 2^{-n} k \chi_{E_{k,n}} + 2^n \chi_{E'_n} \tag{3.8}$$

es creciente y con límite $f$ y que este límite es uniforme en cualquier conjunto medible en el que $f$ sea finita.

Por lo tanto,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

y si $f$ y $g$ son dos funciones medibles no negativas,

$$f_n(x) + g_n(x) \uparrow f + g(x)$$

tenemos

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

En cuanto a la definición de $u_+$, esto nos permite ampliar la definición de la integral a cualquier función *integrable*.

**Definición 3.5.** *Se dice que una función ampliada medible* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *es integrable en* $\boldsymbol{E}$ *cuando sus partes positivas y negativas tienen ambas integrales finitas en* $\boldsymbol{E}$*, luego*

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

Observe que $|f|$ es $\mu$-integrable cuando lo es $f$. Uno de los objetos que deseamos estudiar es el espacio de las funciones integrables, por lo que el hecho de que la integral de $|f|$ pueda anular su valor nos invita a fijarnos en lo que a primera vista parece un objeto mucho más complicado. Consideremos una relación de equivalencia entre funciones integrables

$$f_1 \equiv f_2 \Longleftrightarrow \mu(\{x \in X; f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0. \tag{3.9}$$

Es decir, identificamos dos funciones de este tipo si son iguales y "externas a un conjunto de medida cero". Evidentemente, si $f_1 \equiv f_2$ tendremos, en este sentido

$$\int_X |f_1| d\mu = \int_X |f_2| d\mu = 0, \ \int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu.$$

Una condición necesaria para que una función medible $f \geq 0$ sea integrable es

$$\mu\{x \in X; f(x) = \infty\} = 0.$$

Llamamos $E$ al conjunto (necesariamente medible) en el que $f = \infty$. Si este conjunto no es de medida igual a cero, la secuencia de funciones simples $n\chi_E \leq f$ tiene una integral que tiende a infinito. De ello se desprende que para cada clase de equivalencia contemplada en (3.9) existe un representante que es una función finita en todos sus puntos. Así, si $f$ es un representante;

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin E \\ 0 & x \in E \end{cases}$$

también lo será.

Mediante $L^1(X, \mu)$ indicamos el espacio compuesto por dichas clases de equivalencia de funciones integrables. Se trata de un espacio lineal normado del mismo tipo que vimos en el Problema 11.

El teorema de la convergencia monótona suele aparecer bajo la forma del lema de Fatou.

**Lemma 3.6** (Lema de Fatou). *Si $f_k$ es una secuencia de funciones integrables no negativas:*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \, .$$

*Prueba*: Definimos $F_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x)$. Por tanto $F_k$ es una secuencia creciente de funciones no negativas con función límite $\liminf_{n\to\infty} f_n$ y $F_k(x) \leq f_n(x)$ $\forall$ $n \geq k$. Por el teorema de la convergencia monótona:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int F_k(x) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Podemos ampliar la integral a funciones de valores complejos, diciendo simplemente que

$$f : X \to \mathbb{C}$$

es integrable cuando sus partes real e imaginaria son ambas integrables. Entonces, por definición,

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

para cualquier $E \subset X$ que sea medible. De donde se deduce que si $f$ es integrable también lo será $|f|$. Asimismo,

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu \, .$$

Esto resulta obvio si

$$\int_E f \, d\mu = 0,$$

y, en caso contrario,

$$\int_E f\,d\mu = Re^{i\theta}\ R > 0\,,\ \theta \subset [0, 2\pi)\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\,d\mu\right| &= e^{-i\theta}\int_E f\,d\mu \\ &= \int_E e^{-i\theta} f\,d\mu \\ &= \int_E \mathbb{R}e(e^{-i\theta} f)\,d\mu \\ &\leq \int_E \left|\mathbb{R}e(e^{-i\theta} f)\right|\,d\mu \\ &\leq \int_E \left|e^{-i\theta} f\right|\,d\mu = \int_E |f|\,d\mu\,.\end{aligned}$$

El otro resultado significativo sobre convergencia en integrales es el *teorema de la convergencia dominada* de Lebesgue.

**Teorema 3.7.** *Si $f_n$ es una secuencia de funciones integrables, $f_k \to f$ a.e.*[5] *y* $|f_n| \leq g$ *para una g integrable, f será integrable y*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu\,.$$

*Prueba.* En primer lugar, podemos hacer que la secuencia $f_n(x)$ converja cambiando todas las $f_n(x)$' a cero en un conjunto de medida cero externo a aquél en el que convergen. Esta operación no supondrá ningún cambio en las conclusiones. Aún más, es suficiente para suponer que las $f_n$ son de valor real. A continuación consideraremos

$$h_k = g - f_k \geq 0\,.$$

Ahora, $\liminf_{k\to\infty} h_k = g - f$ por la convergencia de $f_n$; en particular $f$ es integrable.

Aplicando la convergencia monótona y el lema de Fatou

$$\begin{aligned}\int (g - f) d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} h_k\,d\mu &\leq \liminf_{k\to\infty} \int (g - f_k)\,d\mu \\ &= \int g\,d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int f_k\,d\mu\,.\end{aligned}$$

[5] Significa en el complemento cuando se trata de un conjunto de medida cero.

Del mismo modo, si $H_k = g + f_k$:

$$\int (g+f)d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} H_k\, d\mu \leq \int g\, d\mu + \liminf_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu.$$

Se desprende que

$$\limsup_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu \leq \int f\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu.$$

Y, por consiguiente:

$$\int f_k\, d\mu \to \int f\, d\mu\,.$$

Una vez probado el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, lo aplicaremos a la demostración de algo importante. Al igual que antes, $\mu$ es una medida positiva en $X$. Ya hemos definido $L^1(X, \mu)$; ahora tendremos en cuenta un espacio más general; $L^p(X, \mu)$. Se dice que una función medible

$$f : X \to \mathbb{C}$$

es $L^p$ para $1 \leq p < \infty$, cuando $|f|^p$ es integrable[6], es decir

$$\int_X |f|^p\, d\mu < \infty\,.$$

Al igual que antes, contemplaremos las clases de equivalencia de tales funciones bajo el punto de vista de la relación de equivalencia

$$f \sim g \Leftrightarrow \mu\{x; (f-g)(x) \neq 0\} = 0\,. \tag{3.10}$$

Mediante $L^p(X, \mu)$ indicamos el espacio de estas clases de equivalencia. Se trata de un espacio lineal y la función

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \tag{3.11}$$

es una norma (suponemos siempre que $1 \leq p < \infty$, y en ocasiones $p = 1$ queda excluido, aunque posteriormente se permite que p = $\infty$). Resulta sencillo comprobar todo ello, salvo la desigualdad del triángulo. Para ello comenzaremos por

**Lema 3.8.** *Si* $a \geq 0$, $b \geq 0$ *y* $0 < \gamma < 1$:

$$a^\gamma b^{1-\gamma} \leq \gamma a + (1-\gamma)b \tag{3.12}$$

existiendo igualdad únicamente cuando $a = b$.

*Prueba.* La prueba es sencilla cuando $b = 0$. En tal caso suponemos que $b > 0$ y dividimos por $b$. Tomando $t = a/b$ tenemos que demostrar

---

[6] Compruebe que $|f|^p$ es medible automáticamente.

$$(3.13) \qquad t^{\gamma} \leq \gamma t + 1 - \gamma\,,\ 0 \leq t\,,\ 0 < \gamma < 1\,.$$

La función $f(t) = t^{\gamma} - \gamma t$ es diferenciable para $t > 0$ con una derivación $\gamma t^{\gamma-1} - \gamma$, que es positiva para $t < 1$. Por lo tanto, $f(t) \leq f(1)$ con igualdad solamente para $t = 1$. Dado que $f(1) = 1 - \gamma$, tenemos (3.13), lo que prueba el lema.

Podemos utilizar lo anterior para probar la desigualdad de Hölder

**Lema 3.9.** *Si $f$ y $g$ son medibles*

$$(3.14) \qquad \left|\int fg d\mu\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

*para cualquier* $1 < p < \infty$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

*Prueba.* Si $\| f \|_p = 0$ ó $\| g \|_q = 0$ el resultado es insignificante, al igual que cuando es infinito. Por consiguiente, consideraremos

$$a = \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right|^p\ ,\ b = \left|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right|^q$$

y aplicaremos (3.12) con $\gamma = \frac{1}{p}$.
Obtenemos:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}\,.$$

E integrando en $X$:

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_X |f(x)g(x)|\ d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Dado que

$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \int_X |fg|\ d\mu$$

lo anterior implica (3.14).
La desigualdad final que buscamos es la desigualdad de *Minkowski*.

**Proposición 3.10.** *Si* $1 < p < \infty$ *y* $f, g \in L^p(X, \mu)$:

$$(3.15) \qquad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

*Prueba.* Acabamos de ver el supuesto en el que $p = 1$. Asimismo, es obvio que si $f + g = 0$ a.e.. De lo contrario, podremos escribir

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)\, |f + g|^{p-1}$$

y aplicar la desigualdad de Hölder al lado derecho de la ecuación, expandido

$$\int |f + g|^p \ d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \ , \left(\int |f + g|^{q(p-1)} \ d\mu\right)^{1/q} \,.$$

Dado que $q(p - 1) = p$ y $1/q = 1/p$ tenemos (3.15).

De esta forma, sabemos que $L^p(X, \mu)$ es un espacio normado para $1 \leq p < \infty$. Éste, en particular, es un espacio métrico. Otra importante propiedad que puede tener un espacio métrico es la *completitud*, que significa que cada secuencia de Cauchy es convergente.

**Definición 3.11.** *Un espacio normado en el que el espacio métrico subyacente es completo se denomina espacio de* Banach.

**Teorema 3.12.** *Para cualquier espacio de medida* $(X, M, \mu)$ *los espacios* $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$*, son espacios de Banach*.

*Prueba.* Queremos demostrar que una secuencia de Cauchy $\{f_n\}$ converge en $L_p(X, \mu)$. Basta con probar que una de sus subsecuencias es convergente. Por la propiedad de Cauchy, para cada $k$ $\exists$ $n = n(k)$ tal que

$$(3.16) \qquad \|f_n - f_\ell\|_p \leq 2^{-k} \ \forall \ \ell \geq n \,.$$

Tomemos la secuencia

$$g_1 = f_1 \ , \ g_k = f_{n(k)} - f_{n(k-1)} \ , \ k > 1 \,.$$

Por (3.16), $\| g_k \|_p \leq 2^{-k}$, para $k > 1$, luego la serie $\sum_k \| g_k \|_p$ converge, por ejemplo a $B < \infty$. A continuación definimos

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \ , \ n \geq 1 \ , \ h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Entonces, por el teorema de la convergencia monótona

$$\int_X h^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |h_n|^p \, d\mu \leq B^p \,,$$

donde hemos aplicado también la desigualdad de Minkowski. Por lo tanto $h \in L^p(X, \mu)$, luego la serie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

converge (totalmente) prácticamente en toda su extensión. Dado que

$$|f(x)|^p = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} g_k \right|^p \leq h^p$$

con $h^p \in L'(X, \mu)$, se aplica el teorema de la convergencia dominada, que permite demostrar que $f \in L^p(X, \mu)$. Además,

$$\sum_{k=1}^{\ell} g_k(x) = f_{n(\ell)}(x)$$

y

$$\left| f(x) - f_{n(\ell)}(x) \right|^p \leq (2h(x))^p$$

de modo que, de nuevo por el teorema de la convergencia dominada,

$$\int_X \left| f(x) - f_{n(\ell)}(x) \right|^p \to 0 \,.$$

Por consiguiente la subsecuencia $f_{n(l)} \to f$ en $L^p(X, \mu)$, lo que prueba su completitud.

A continuación me gustaría volver al punto de partida para analizar el teorema de la representación de Riesz. Existen dos importantes contribuciones a la teoría de medidas que aún no hemos tratado (haré que los estudiantes los apliquen ampliamente en los problemas): el teorema de la descomposición de Hahn y el teorema de Radon-Nikodym. Por ahora podemos pasar sin este último, pero sí que me referiré al primero.

Consideremos un espacio métrico localmente compacto $X$. Mediante una medida de Borel en $X$, o mediante una medida de Borel con signo, indicaremos una función en conjuntos de Borel

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$$

que viene dada como la diferencia entre dos medidas de Borel finitas y positivas.

$$\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E) \,. \tag{3.17}$$

Del mismo modo, diremos que $\mu$ es una medida de Radon, o una medida de Radon con signo, cuando *se pueda expresar* como tal diferencia, siendo tanto $\mu_1$ como $\mu_2$ medidas finitas de Radon. Para una exposición más detallada de este punto, véanse los problemas que se plantean más abajo.

Supongamos que $M(X)$ indica el conjunto de medidas finitas de Radon en $X$. Se trata de un espacio normado con

$$\|\mu\|_1 = \inf(\mu_1(X) + \mu_2(X)) \tag{3.18}$$

con el ínfimo (inf) aplicado a todas las descomposiciones de Radon (3.17). Cada medida de Radon con signo define una función lineal continua en $C_0(X)$:

$$\int \cdot\, d\mu : \mathcal{C}_0(X) \ni f \longmapsto \int_X f \cdot d\mu\,. \tag{3.19}$$

**Teorema 3.13.** (Representación de Riesz). *Si $X$ es un espacio métrico localmente compacto, toda funcional lineal continua en $C_0(X)$ vendrá dada por una medida finita y única de Radon en $X$ mediante* (3.19).

Luego el espacio dual de $C_0(X)$ es $M(X)$; o al menos de esta manera es como se suele interpretar dicho resultado.

$$(\mathcal{C}_0(X))' = M(X)\,, \tag{3.20}$$

(véanse los comentarios que siguen al párrafo "*Prueba*").

*Prueba.* Ya hemos visto la prueba de la mitad de este teorema. Recordemos los pasos seguidos.

Partiendo de $u \in (C_0(X))'$ quedó probado que $u = u_+ - u_-$; siendo $u_\pm$ funcionales lineales continuas y *positivas* (Lema 1.5.). A continuación, demostramos que $u \geq 0$ define una medida de Radon finita y positiva $\mu$. Aquí $\mu$ se halla definida por (1.11) en conjuntos abiertos y $\mu(E) = \mu^*(E)$ se obtiene mediante (1.12) en conjuntos generales de Borel. Su carácter finito viene dado por

$$\begin{aligned}\mu(X) &= \sup\{u(f)\,;\, 0 \leq f \leq 1\,,\, \operatorname{supp} f \Subset X\,,\, f \in C(X)\} \\ &\leq \|u\|\,.\end{aligned} \tag{3.21}$$

A partir de la Proposición 2.8 llegamos a la conclusión de que $\mu$ es una medida de Radon. Como este mismo argumento se puede aplicar a $u_\pm$; tendremos dos medidas de Radon positivas y finitas $u_\pm$ y, consecuentemente, una medida de Radon con signo

$$\mu = \mu_+ - \mu_- \in M(X)\,. \tag{3.22}$$

En los problemas, el estudiante deberá probar el teorema de descomposición de Hahn. Más concretamente, en el Problema 14 se pide demostrar que (3.22) es la descomposición de Hahn de $\mu$ ; lo que significa que existe un conjunto de Borel $E \subset X$ tal que $\mu_-(E) = 0$ , $\mu_+(X \setminus E) = 0$.

Lo que hemos definido es una correspondencia lineal

$$(\mathcal{C}_0(X))' \to M(X),\ u \longmapsto \mu\,. \tag{3.23}$$

Deseamos demostrar que esta correspondencia es un isomorfismo; es decir, que a cada elemento de un grupo le corresponde uno y sólo uno del otro.

En primer lugar demostraremos que se trata de una correspondencia biunívoca. Es decir, suponemos que $\mu = 0$. Dada la unicidad de la descomposición de Hahn, esto implica que $\mu_+ = \mu_- = 0$. Podemos suponer asimismo que $u \geq 0$ y que $\mu = \mu_+ = 0$, y tenemos que probar que $u = 0$; lo que es obvio teniendo en cuenta

$$(3.24) \qquad \mu(X) = \sup\{u(f)\,;\, \operatorname{supp} u \Subset X\,, 0 \leq f \leq 1\ f \in C(X)\} = 0$$

$$\Rightarrow u(f) = 0 \text{ para tal } f.$$

Si $0 \leq f \in C(X)$ y $\operatorname{supp} f \Subset X$ entonces $f' = f/\|f\|_\infty$ es de este tipo luego $u(f) = 0$ para cada $0 \leq f \in C(X)$ de soporte compacto. De la descomposición de funciones continuas en partes positivas y negativas se desprende que $u(f) = 0$ para cada $f$ de soporte compacto. Por último, $C_0(X)$ es el cierre del espacio de funciones continuas de soporte compacto, luego, por la continuidad supuesta de $u$, $u = 0$.

Queda por demostrar que *cada* medida finita de Radon en $X$ se deriva de (3.23). Realizaremos esta demostración construyendo $u$ a partir de $\mu$, recurriendo de nuevo a la descomposición de Hahn de $\mu$, al igual que en (3.22)[7]. Así, suponemos que $\mu \geq 0$ y construimos $u$. Evidentemente, lo que queremos obtener es

$$(3.25) \qquad u(f) = \int_X f\, d\mu\,,\ f \in C_c(X)\,.$$

En este punto, recordemos que la Proposición 2.11. establecía que las funciones continuas en $X$, un espacio métrico localmente compacto, son medibles (según Borel). Sabemos, además, que existe una secuencia creciente de funciones simples con límite $f$, por lo que

$$(3.26) \qquad \left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \mu(X) \cdot \|f\|_\infty\,.$$

Lo cual demuestra que $u$ en (3.25) *es* continua y que su norma $\|u\| \leq \mu(X)$. De hecho,

$$(3.27) \qquad \|u\| = \mu(X)\,.$$

La regularidad interior de $\mu$ implica que existe un conjunto compacto $K \Subset X$ con $\mu(K) \geq \mu(X) - 1/n$; luego también existe $f \in C_c,(X)$ con $0 \leq f \leq 1$ y $f = 1$ en $K$. De ello resulta que $\mu(f) \geq \mu(K) \geq \mu(X) - 1/n$, para *cualquier* $n$, lo que prueba (3.27).

Nos queda por demostrar que si $u$ viene definida por (3.25), siendo $\mu$ una medida de Radon finita positiva, entonces la medida $\tilde{\mu}$ definida a partir de $u$ mediante (3.25) coincide precisamente con $\mu$.

[7] De hecho, podemos tratar cualquier descomposición (3.22) como una diferencia de medidas positivas de Radon.

Este paso no ofrece dificultades siempre que mantengamos las ideas claras. Partiendo de una medida finita de Radon $\mu \geq 0$, definimos $u$ mediante (3.25) y, para $U \subset X$ abierto (3.28)

$$\tilde{\mu}(U) = \sup\left\{\int_X f\,d\mu\,,\ 0 \leq f \leq 1\,,\ f \in C(X),\ \operatorname{supp}(f) \Subset K\right\}.$$

Por las propiedades de la integral,

$$\tilde{\mu}(U) \leq \mu(U).$$

A la inversa, si $K \Subset U$ existirá un elemento $f \in C_c,(X)$, $0 \leq f \leq 1$ y $f = 1$ en $K$ y $\operatorname{supp}(f) \subset U$. Así sabemos que

$$\tilde{\mu}(U) \geq \int_X f\,d\mu \geq \mu(K)\,. \tag{3.29}$$

Por la regularidad interna de $\mu$, podemos elegir $K \Subset U$ de tal modo que $\mu(K) \geq \mu(U) - \epsilon$, dado $\epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\tilde{\mu}(U) = \mu(U).$$

De esta forma queda probado el teorema de representación de Riesz mediante la descomposición de la medida; lo que explicaré en clase si hay suficiente interés en ello. En mi opinión, esto cubre suficientemente la teoría de medidas.

Conviene observar que, en realidad, hemos probado algo más profundo que el enunciado del teorema, como es que bajo la correspondencia $u \leftrightarrow \mu$,

$$\|u\| = |\mu|\,(X) =: \|\mu\|_1\,. \tag{3.30}$$

Por consiguiente, la correspondencia es una *isometría.*