

# MATERIAL DE CLASE DEL CURSO 18.155. OTOÑO 2002

## 1. FUNCIONES CONTINUAS

Para empezar, me gustaría insistir sobre cuestiones que creo que los estudiantes ya conocen para luego pasar a explicar la dirección que tomará el curso. Comencemos por fijar el contexto.

Una noción básica que supongo les resultará suficientemente familiar es la de espacio métrico ([5] pág. 9). El espacio métrico consiste en un conjunto  $X$  y una función de distancia

$$d: X \times X = X^2 \rightarrow [0, \infty]$$

Haga avanzar el texto para acceder a más contenidos

que cumple los tres axiomas siguientes:

(1.1)

- i)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, (y d(x, y) \geq 0)$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$
- iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$

La teoría básica de los espacios métricos tiene que ver con las propiedades de subconjuntos (abiertos, cerrados, compactos, conectados), secuencias (convergentes, de Cauchy) y mapas (continuos) y con las relaciones entre estas nociones. Recordemos uno de estos resultados.

**Proposición 1.1.** *Un mapa  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios métricos es continuo si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes.*

- (1)  $f^{-1}(O) \subset X$  es abierta  $\forall O \subset Y$  abierta.
- (2)  $f^{-1}(C) \subset X$  es cerrada  $\forall C \subset Y$  cerrada.
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  en  $Y$  si  $x_n \rightarrow x$  en  $X$ .

El ejemplo clásico de espacio métrico es el espacio euclídeo. El espacio euclídeo real  $n$ -dimensional,  $\mathbb{R}^n$ , es el conjunto de  $n$ -múltiplos ordenados de números reales

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n.$$

Es también el ejemplo clásico de un espacio vectorial (o lineal) con las operaciones

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ cx = (cx_1, \dots, cx_n).$$

La métrica viene dada normalmente por la métrica euclídea

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2},$$

en el sentido de que

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Abstraigamos esta expresión inmediatamente a la noción de espacio vectorial normado, o espacio normado. Se trata de un espacio vectorial  $V$  (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) dotado de una *norma*, lo que es como decir una función

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow [0, \infty)$$

que satisfaga

$$(1.2) \quad \begin{aligned} & i) \|v\| = 0 \iff v = 0, \\ & ii) \|cv\| = |c| \|v\| \quad \forall c \in \mathbb{K}, \\ & iii) \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que  $(V, d)$ ,  $d(v, w) = \|v - w\|$  es un espacio vectorial. Asimismo, en este caso estoy empleando  $\mathbb{K}$  para indicar  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , según sea apropiado.

El supuesto de espacios normados dimensionales y finitos no resulta especialmente interesante ya que, aparte de la dimensión, todos ellos son "lo mismo". En general, diremos que dos normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  en  $V$  son equivalentes cuando existe  $C > 0$  de tal modo que

$$\frac{1}{C} \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C \|v\|_1 \quad \forall v \in V.$$

**Proposición 1.2.** *Dos normas cualesquiera en un espacio vectorial dimensional finito son equivalentes.*

Nos interesa principalmente el supuesto dimensional infinito. Comenzaré el curso de un modo ligeramente heterodoxo, concentrándome en un espacio normado de este tipo (durante una clase). Partiremos de un espacio métrico  $X$ . El supuesto de una función continua,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (o a  $\mathbb{C}$ ) es un supuesto especial de la Proposición 1.1 anterior. Entonces, definiremos

$$C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$$

De hecho, la misma notación se emplea normalmente para el espacio de funciones de variables complejas. Si deseamos distinguir entre estas dos posibilidades podemos recurrir a una notación más pretenciosa;  $C(X; \mathbb{R})$  y  $C(X; \mathbb{C})$ . La norma "obvia" en este espacio lineal es la norma suprema (o norma "uniforme")

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

En este caso,  $X$  es un espacio métrico arbitrario. Por el momento, supondremos que  $X$  es un espacio "físico", parecido a  $\mathbb{R}^n$ . Con respecto a la dimensionalidad finita de  $\mathbb{R}^n$ , a menudo damos por supuesto (o pedimos) que  $X$  sea *localmente compacto*, lo que simplemente significa que cada punto tiene un vecindario compacto; es decir, que se halla dentro de un conjunto compacto. Tanto si es localmente compacto como si no, podemos considerar

$$(1.3) \quad C_0(X) = \left\{ f \in C(X); \forall \epsilon > 0 \exists K \Subset X \text{ s.t. } \sup_{x \notin K} |f(x)| \leq \epsilon \right\}.$$

Aquí, la notación  $K \Subset X$  significa " $K$  es un subconjunto compacto de  $X$ ".

Si  $V$  es un espacio lineal normado, nos interesarán especialmente las funcionales lineales continuas en  $V$ . El término "funcional" es aquí sinónimo de función, si bien se

permite que  $V$  sea un valor "grande" (al contrario que  $\mathbb{R}$ ), por lo que se habla de "funcional" únicamente por razones de tipo histórico.

**Proposición 1.3.** *Las siguientes condiciones son equivalentes en una funcional lineal  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  de un espacio normado  $V$ .*

- (1)  $u$  es continua.
- (2)  $u$  es continua en 0.
- (3)  $\{u(f) \in \mathbb{R} ; f \in V, \|f\| \leq 1\}$  es acotada.
- (4)  $\exists C$  tal que  $|u(f)| \leq C \|f\| \quad \forall f \in V$ .

*Prueba.* (1)  $\Rightarrow$  (2) por definición. Luego (2) implica que  $u^{-1}(-1,1)$  es un vecindario abierto de  $0 \in V$ , así que para algunos valores  $\epsilon > 0$ ,  $u(\{f \in V; \|f\| < \epsilon\}) \subset (-1,1)$ . Por linealidad de  $u$ ,  $u(\{f \in V; \|f\| < 1\}) \subset (-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon})$  es una función acotada, luego (2)  $\Rightarrow$  (3). Por lo tanto, (3) implica que

$$|u(f)| \leq C \quad \forall f \in V, \|f\| \leq 1$$

para parte de  $C$ . Aplicando de nuevo la linealidad de  $u$ , si  $f \neq 0$ ,

$$|u(f)| \leq \|f\| u\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \leq C \|f\|,$$

lo que nos da (4). Por último, asumiendo (4),

$$|u(f) - u(g)| = |u(f - g)| \leq C \|f - g\|$$

demuestra que  $u$  es continua en cualquier punto  $g \in V$ .

A la vista de esta identificación, se suele decir que las funcionales lineales continuas son *acotadas*. Un concepto importante que más adelante utilizaremos es el de "dualidad". Esto sugiere, en particular, que resulta conveniente examinar la totalidad de las funcionales lineales acotadas en  $V$ . El espacio *dual* será

$$V' = V^* = \{u : V \rightarrow \mathbb{K}, \text{ lineal y acotada}\}.$$

Se trata también de un espacio lineal normado en el que las operaciones lineales son

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (u + v)(f) &= u(f) + v(f) \\ (cu)(f) &= c(u(f)) \end{aligned} \quad \forall f \in V.$$

La norma natural en  $V'$  es

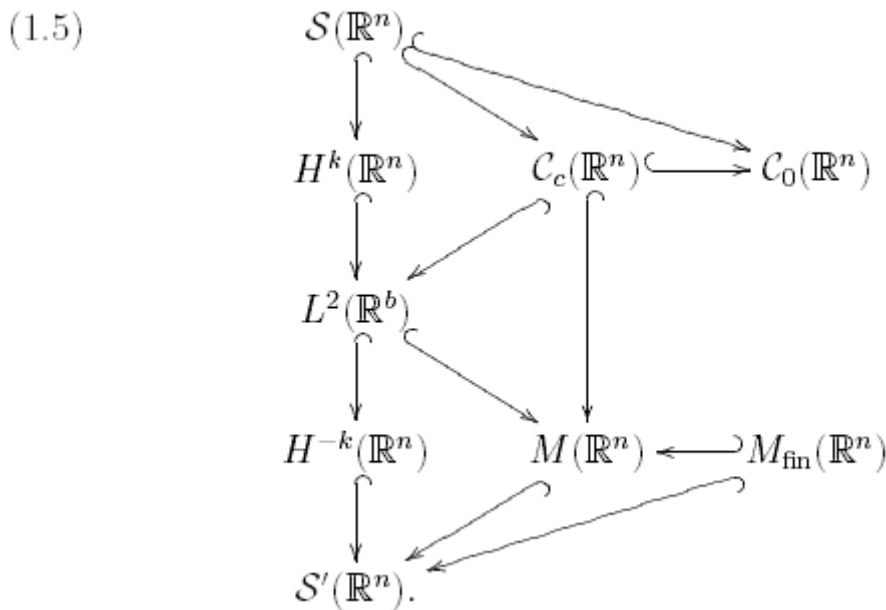
$$\|u\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |u(f)|.$$

Esta es la "constante óptima" en el cálculo de la acotación,

$$\|u\| = \inf \{C; |u(f)| \leq C\|f\| \forall f \in V\}.$$

Una de las preguntas básicas que deseo plantear en esta primera parte del curso es: ¿cuál es el dual de  $C_0(X)$  para un espacio métrico localmente compacto  $X$ ? La respuesta nos viene dada por el teorema de la representación de Riesz, en términos de medidas (de Borel).

Veamos a continuación una representación aproximada de la "regularidad de funciones", que es el tema sobre el que trata el curso, aunque aún no hayamos explicado la mayoría de estos espacios. Las funciones uniformes (y los espacios pequeños) se hallan en la parte superior. La dualidad fluctúa hacia arriba y hacia abajo y, como veremos más adelante,  $L^2$ , el espacio de funciones integrables cuadradas de Lebesgue, está normalmente "en la mitad". Comenzaré por explicar primero el lado derecho del diagrama, donde tenemos el espacio de funciones continuas en  $\mathbb{R}^n$ , que se anula cuando tiende a infinito, y su espacio dual,  $M_{\text{fin}}(\mathbb{R}^n)$ , el espacio de las medidas de Borel finitas. Aunque existen otros muchos espacios que nos podemos encontrar, aquí me he limitado a incluir funciones test, funciones de Schwartz, espacios de Sobolev y sus duales, siendo  $k$  un entero positivo general.



He marcado como objetivo comprender el espacio dual  $M(\mathbb{R}^n)$  de  $C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio métrico localmente compacto. De esta forma, me obligo a tratar los distintos elementos de la teoría de medidas y de la integración de Lebesgue...lo que supone "obligarse" en un sentido verdaderamente amplio.

El punto en el que se centra nuestro interés es  $\mathbb{R}^n$ . Un ejemplo evidente de función lineal continua en  $C_0(\mathbb{R}^n)$  nos viene dado por la integración de Riemann aplicada, por ejemplo, a un cubo unitario  $[0,1^n]$ :

$$u(f) = \int_{[0,1]^n} f(x) dx.$$

Deberemos demostrar de algún modo que todas las funciones lineales continuas en  $C_0(X)$  vienen dadas por la integración. Tendremos, no obstante, que interpretar la integración de un modo bastante amplio, ya que también hay que contar con la existencia de las *funciones de valoración*. Así, si  $z \in X$ , consideremos el delta de Dirac

$$\delta_z(f) = f(z).$$

Lo que también se denomina *masa puntual* de  $z$ . De modo que necesitaremos una teoría de medida e integración lo bastante amplia como para comprender estos dos casos.

Una propiedad específica de  $C_0(X)$ , en comparación con espacios normados generales, es que sus elementos incluyen la noción de positividad. Por lo tanto,  $f \geq 0$  significa simplemente que  $f(x) \geq 0 \forall x \in X$ .

**Lema 1.4.** *Cada  $f \in C_0(X)$  puede descomponerse exclusivamente como la diferencia entre sus partes positivas y negativas.*

$$(1.6) \quad f = f_+ - f_-, \quad f_{\pm} \in C_0(X), \quad f_{\pm}(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in X.$$

*Prueba.* Defina

$$f_{\pm}(x) = \begin{cases} \pm f(x) & \text{si } \pm f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \pm f(x) < 0 \end{cases}$$

para un mismo signo en toda la expresión. Luego (1.6) seguirá siendo válido. Tenga en cuenta que  $f_+$  es continua en cada  $y \in X$  puesto que, al ser  $U$  un vecindario aproximado de  $y$ , en cada caso

$$f(y) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{para } x \in U \Rightarrow f_+ = f \text{ en } U$$

$$f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \text{para } x \in U \Rightarrow f_+ = 0 \text{ en } U$$

$$f(y) = 0 \Rightarrow \text{dado } \epsilon > 0 \exists U \text{ sujeto a } |f(x)| < \epsilon \text{ en } U$$

$$\Rightarrow |f(x)| < \epsilon \text{ en } U$$

Por consiguiente,  $f_- = f - f_+ \in C_0(X)$ , ya que tanto  $f_+$  como  $f_-$  se anulan a medida que tienden a infinito.

De modo parecido podemos dividir elementos del espacio dual en sus partes positivas y negativas, si bien ello resulta ligeramente más complicado. Diremos que  $u \in (C_0(X))'$  es positivo si

$$(1.7) \quad u(f) \geq 0 \quad \forall 0 \leq f \in C_0(X).$$

Para un  $u = (C_0(X))'$  general (real) y para cada  $0 \leq f \in C_0(X)$  fijamos

$$(1.8) \quad u_+(f) = \sup \{u(g) ; g \in C_0(X), 0 \leq g(x) \leq f(x) \forall x \in X\}.$$

$$u(g) \leq C \|g\|_{\infty} \leq C \|f\|_{\infty}.$$

Debe ser finito, ya que

$$u(g) \leq C \|g\|_\infty \leq C \|f\|_\infty.$$

Además, si  $0 < c \in \mathbb{R}$ ; entonces  $u_+(cf) = cu_+(f)$  por inspección. Supongamos que  $0 \leq f_i \in C_0(X)$  para  $i = 1, 2$ . Por tanto, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $g_i \in C_0(X)$  con  $0 \leq g_i(x) \leq f_i(x)$  y

$$u_+(f_i) \leq u(g_i) + \epsilon.$$

De donde se sigue que:

$$0 \leq g(x) \leq f_1(x) + f_2(x) \text{ if } g = g_1 + g_2, \text{ luego,}$$

$$u_+(f_1 + f_2) \geq u(g) = u(g_1) + u(g_2) \geq u_+(f_1) + u_+(f_2) - 2\epsilon.$$

Por consiguiente,

$$u_+(f_1 + f_2) \geq u_+(f_1) + u_+(f_2).$$

A la inversa, si  $0 \leq g(x) \leq f_1(x) + f_2(x)$  conjunto  $g_1(x) = \min(g, f_1) \in C_0(X)$  y  $g_2 = g - g_1$ . Luego  $0 \leq g_i \leq f_i$  y  $u_+(f_1) + u_+(f_2) \geq u(g_1) + u(g_2) = u(g)$ . Aplicando el supremo a  $g$ ,  $u_+(f_1 + f_2) \leq u_+(f_1) + u_+(f_2)$ , de donde obtenemos

$$(1.9) \quad u_+(f_1 + f_2) = u_+(f_1) + u_+(f_2).$$

Tras haber demostrado la linealidad efectiva en las funciones positivas podremos obtener una funcional lineal definiendo

$$(1.10) \quad u_+(f) = u_+(f_+) - u_+(f_-) \quad \forall f \in C_0(X).$$

Hay que tener en cuenta que (1.9) demuestra que  $u_+(f) = u_+(f_+) - u_+(f_-)$  para cualquier descomposición de  $f = f_+ - f_-$  con  $f_\pm \in C_0(X)$ , ambas positivas. [Dado que  $f_+ + f_- = f_+ + f_- + f_- = f_+ + f_- + f_+$ ;  $u_+(f_+) + u_+(f_-) = u_+(f_+) + u_+(f_+)$ ]. Asimismo,

$$|u_+(f)| \leq \max(u_+(f_+), u_+(f_-)) \leq \|u\| \|f\|_\infty$$

$$\implies \|u_+\| \leq \|u\|.$$

La funcional  $u_- = u_+ - u$  es también positiva, ya que  $u_+(f) \geq u(f)$  para todo  $0 \leq f \in C_0(x)$ . De esta forma hemos demostrado el

**Lema 1.5.** *Todo elemento  $u \in (C_0(X))'$  se puede descomponer,*

$$u = u_+ - u_-$$

*en la diferencia de elementos positivos con*

$$\|u_+\|, \|u_-\| \leq \|u\|.$$

La idea que subyace en la definición de  $u_+$  es la de que  $u$  es en sí, aproximadamente, una "integración para una función" (si bien aún *no* sabemos cómo interpretarla). Por ahora estamos tratando de eliminar la parte negativa de esa función. El siguiente paso consiste en demostrar que una función positiva se corresponde con

una "medida", en el sentido de función que mide el tamaño de conjuntos. Para definir este paso, lo que de verdad nos interesa es calcular  $\mu$  en la función característica de un conjunto

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Nos encontramos con el problema de que  $\chi_E$  no es continua por lo que, en su lugar, deberemos emplear un concepto similar a (1.8).

Si  $0 \leq u \in (C_0(X))'$  y  $U \subset X$  es abierta, definiremos<sup>1</sup>

$$(1.11) \quad \mu(U) = \sup \{u(f); 0 \leq f(x) \leq 1, f \in C_0(X), \text{supp}(f) \subseteq U\}.$$

Vemos que el soporte de  $f$  ( $\text{supp}(f)$ ) es el *cierre* del conjunto de puntos en los que  $f(x) \neq 0$ . Al ser  $\text{supp}(f)$  siempre cerrada, sólo admitiremos  $f$  en (1.11) cuando su apoyo sea un subconjunto compacto de  $U$ ; ya que sólo entonces "sabremos con certeza" que  $f \in C_0(x)$ .

Supongamos que queremos medir conjuntos generales de este modo. Podremos hacerlo definiendo

$$(1.12) \quad \mu^*(E) = \inf \{\mu(U); U \supset E, U \text{ abierto}\}.$$

Pero con  $\mu$  puede darse el caso de que  $\mu(U) = \infty$ , por lo que tendremos que pensar en

$$(1.13) \quad \mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

definida en el *conjunto exponencial* de  $X$  y tomando valores del sistema ampliado de números reales positivos.

**Definición 1.6.** Una función ampliada positiva  $\mu^*$ , definida en el conjunto exponencial de  $X$ , recibe el nombre de medida exterior cuando  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  siempre que  $A \subset B$  y que

$$(1.14) \quad \mu^*\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j \mu(A_j) \quad \forall \quad \{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{P}(X).$$

**Lema 1.7.** Si  $\mu$  es una función continua lineal positiva en  $C_0(X)$ ;  $\mu^*$ , definida por (1.11), (1.12) será una medida exterior.

Para probar este lema deberemos hallar un número suficiente de funciones continuas. He pospuesto la prueba del siguiente resultado para el Problema 2.

**Lema 1.8.** Supongamos que  $U_i, i = 1, \dots, N$  es una colección finita de conjuntos abiertos en un espacio métrico localmente compacto y que  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_i$  es un subconjunto compacto, con lo que existen funciones continuas  $f_i \in C(X)$  con  $0 \leq f_i \leq 1$ ,  $\text{supp}(f_i) \subseteq U_i$  y

<sup>1</sup> Véase el comienzo de [5] en la pág. 42 o el comienzo de [1] en la pág. 206

$$(1.15) \quad \sum_i f_i = 1$$

en un vecindario de  $K$ .

*Prueba del lema 1.7.* Vamos a realizar la prueba de (1.14). Partimos de la suposición de que los  $A_i$  son abiertos, por lo que también lo será  $A = \bigcup_i A_i$ . Si  $f \in C(X)$  y  $\text{supp}(f) \subseteq A$ , entonces  $\text{supp}(f)$  se halla abarcado por una unión finita de los  $A_i$ s. Aplicando el lema 1.8 podemos obtener  $f_i$ s, todos salvo un número finito igual a cero, luego  $\text{supp}(f) \subseteq A_i$  y  $\sum_i f_i = 1$  en un vecindario de  $\text{supp}(f)$ .

Dado que  $f = \sum_i f_i f$ , podemos concluir que

$$u(f) = \sum_i u(f_i f) \implies \mu^*(A) \leq \sum_i \mu^*(A_i)$$

puesto que  $0 \leq f_i f \leq 1$  y  $\text{supp}(f_i f) \subseteq A_i$ .

Por lo tanto, (1.14) sigue siendo válido cuando los  $A_i$  son abiertos. En el supuesto general, si  $A_i \subset B_i$ , con los  $B_i$  abiertos, tenemos, a partir de la definición

$$\mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_i B_i\right) \leq \sum_i \mu^*(B_i).$$

Aplicando el ínfimo a los  $B_i$ , tenemos el (1.14) en general.