

# MATERIAL DE CLASE DEL CURSO 18.155. OTOÑO DE 2002

## 2. MEDIDAS Y $\sigma$ -ALGEBRAS

Una medida externa como  $\mu^*$  es un objeto bastante elemental ya que, incluso cuando los conjuntos  $A_i$  son disjuntos, generalmente existe una desigualdad estricta en (1.14). Siendo razonables, no cabe esperar una igualdad en (1.14), para uniones disjuntas y para una función definida en *todos* los subconjuntos de  $X$ , por lo que nos centraremos exclusivamente en series más reducidas de subconjuntos.

**Definición 2.1.** Una serie de subconjuntos  $\mathcal{M}$  de un conjunto  $X$  es una  $\sigma$ -álgebra si

- (1)  $\phi, X \in \mathcal{M}$
- (2)  $E \in \mathcal{M} \implies E^C = X \setminus E \in \mathcal{M}$
- (3)  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$ .

Para una medida general externa  $\mu^*$  definimos el concepto de  $\mu^*$ -medibilidad de un conjunto.

**Definición 2.2.** Un conjunto  $E \subset X$  será  $\mu^*$ -medible (para una medida externa  $\mu^*$  en  $X$ ) si

$$(2.1) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C) \quad \forall A \subset X.$$

**Proposición 2.3.** La serie de conjuntos  $\mu^*$ -medibles para cualquier medida externa es una  $\sigma$ -álgebra.

*Prueba.* Supongamos que  $E$  es  $\mu^*$ -medible;  $E^C$  lo será también por simetría de (2.1).

Llamemos  $A, E$  y  $F$  a tres conjuntos cualesquiera. Tendremos

$$\begin{aligned} A \cap (E \cup F) &= (A \cap E \cap F) \cup (A \cap E \cap F^C) \cup (A \cap E^C \cap F) \\ A \cap (E \cup F)^C &= A \cap E^C \cap F^C. \end{aligned}$$

Partiendo de la sub-aditividad de  $\mu^*$

$$\begin{aligned} &\mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^C) \\ &\leq \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cup F^C) \\ &\quad + \mu^*(A \cap E^C \cap F) + \mu^*(A \cap E^C \cap F^C). \end{aligned}$$

Si  $E$  y  $F$  son  $\mu^*$ -medibles, aplicando dos veces la definición tendremos, para cualquier  $A$ ,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^C) \\
&\quad + \mu^*(A \cap E^C \cap F) + \mu^*(A \cap E^C \cap F^C) \\
&\geq \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^C).
\end{aligned}$$

Como de la sub-aditividad de  $\mu^*$  se deriva la desigualdad inversa;  $E \cup F$  será también  $\mu^*$ -medible.

Si  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$  es una secuencia de conjuntos disjuntos  $\mu^*$ -medibles, definiremos  $F_n =$

$\bigcup_{i=1}^n E_i$  y  $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ . Entonces, para cualquier  $A$ ,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap F_n) &= \mu^*(A \cap F_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_n \cap E_n^C) \\
&= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}).
\end{aligned}$$

Iterando lo anterior demostramos que

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

A partir de la  $\mu^*$ -medibilidad de  $F_n$  y la sub-aditividad de  $\mu^*$ ,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^C) \\
&\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap F^C).
\end{aligned}$$

Tomando como límite  $n \rightarrow \infty$  y aplicando la sub-aditividad,

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap F^C) \\
&\geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^C) \geq \mu^*(A)
\end{aligned}$$

se prueba que las desigualdades son igualdades, luego  $F$  es también  $\mu^*$ -medible.

En general, para *cualquier* unión contable de conjuntos  $\mu^*$ -medibles,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j, \\
\tilde{A}_j &= A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i = A_j \cap \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right)^C
\end{aligned}$$

es  $\mu^*$ -medible, ya que los  $\tilde{A}_j$  son disjuntos.

Una *medida* (lo que en ocasiones se conoce como una *medida positiva*) es una función ampliada definida en los elementos de una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ :

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$$

tal que

$$(2.3) \quad \mu(\emptyset) = 0 \text{ y}$$

$$(2.4) \quad \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$$\text{si } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$$

$$\text{y } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ } i \neq j.$$

En principio, se entiende que los elementos de  $\mathcal{M}$  con medida cero (por ejemplo,  $E \in \mathcal{M}$ ,  $\mu(E) = 0$ ) son "despreciables". Se dice que la medida  $\mu$  es *completa* cuando

$$(2.5) \quad E \subset X \text{ y } \exists F \in \mathcal{M}, \mu(F) = 0; E \subset F \Rightarrow E \in \mathcal{M}.$$

Véase problema 4.

Ya hemos visto anteriormente la primera parte de este importante resultado obtenido gracias a Caratheodory.

**Teorema 2.4.** Si  $\mu^*$  es una medida externa en  $X$ ; la serie de subconjuntos  $\mu^*$ -medibles de  $X$  será una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu^*$  limitada a  $\mathcal{M}$  será una medida completa.

*Prueba.* Ya ha quedado demostrado que la serie de subconjuntos  $\mu^*$ -medibles de  $X$  es una  $\sigma$ -álgebra. Para comprender la segunda parte del teorema, hay que tener en cuenta que al tomar  $A = F$  en (2.2) obtenemos

$$\mu^*(F) = \sum_j \mu^*(E_j) \text{ if } F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_j$$

y los  $E_j$  son elementos disjuntos de  $\mathcal{M}$ . En esto consiste (2.4).

Del mismo modo, si  $\mu^*(E) = 0$  y  $F \subset E$ ;  $\mu^*(F) = 0$ . Por lo tanto, basta con demostrar que para cualquier subconjunto  $E \subset X$ ;  $\mu^*(E) = 0$  implica  $E \in \mathcal{M}$ . Para cualquier  $A \subset X$ , aplicando el hecho de que  $\mu^*(A \cap E) = 0$  y la propiedad 'incremental' de  $\mu^*$

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C) \\ &= \mu^*(A \cap E^C) \leq \mu^*(A)\end{aligned}$$

demuestra que deben ser siempre igualdades, por lo que  $E \in \mathcal{M}$  (es decir, es  $\mu^*$ -medible).

Volviendo a nuestro objetivo principal, recordamos que hemos construido la medida externa de  $\mu^*$  a partir de  $0 \leq u \in (C_0(X))'$  utilizando (1.11) y (1.12). Para poder utilizar frecuentemente la medida cuya existencia se desprende del teorema de Caratheodory necesitaremos:

**Proposición 2.5.** *Si  $0 \leq u \in (C_0(X))'$  para un espacio métrico localmente compacto  $X$ ; cada subconjunto abierto de  $X$  es  $\mu^*$ -medible para la medida externa definida por (1.11) y (1.12), siendo su medida  $\mu$  en (1.11).*

*Prueba.* Supongamos que  $U \subset X$  es abierto. Sólo necesitamos probar (2.1) para todo  $A \subset X$  con  $\mu^*(A) < \infty$ .<sup>2</sup>

Supongamos en primer lugar que  $A \subset X$  es abierto y que  $\mu^*(A) < \infty$ . Luego  $A \cap U$  es abierto, por lo que dado  $\epsilon > 0$  tendremos

$$f \in C(X) \quad \text{supp}(f) \Subset A \cap U$$

con  $0 \leq f \leq 1$  y

$$\mu^*(A \cap U) = \mu(A \cap U) \leq u(f) + \epsilon.$$

$A \setminus \text{supp}(f)$  es también abierto, luego podemos hallar  $g \in C(X)$ ,  $0 \leq g \leq 1$ ,  $\text{supp}(g) \Subset A \setminus \text{supp}(f)$  con

$$\mu^*(A \setminus \text{supp}(f)) = \mu(A \setminus \text{supp}(f)) \leq u(g) + \epsilon.$$

Dado que

$$\begin{aligned}A \setminus \text{supp}(f) \supset A \cap U^C, \quad 0 \leq f + g \leq 1, \quad \text{supp}(f + g) \Subset A, \\ \mu(A) \geq u(f + g) = u(f) + u(g) \\ > \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) - 2\epsilon \\ \geq \mu^*(A) - 2\epsilon\end{aligned}$$

utilizando la sub-aditividad de  $\mu^*$ . Haciendo  $\epsilon \downarrow 0$  podemos concluir que

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) \leq \mu^*(A) = \mu(A).$$

Lo que nos da (2.1) cuando  $A$  es abierto.

Por regla general, si  $E \subset X$  y  $\mu^*(E) < \infty$  y dado  $c > 0$  tenemos  $A \subset X$  abierto con  $\mu^*(E)$

---

<sup>2</sup> ¿Por qué?

$> \mu^*(A) - \epsilon$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) - \epsilon \\ &\geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^C) - \epsilon \\ &\geq \mu^*(E) - \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que (2.1) sigue siendo válido en todo caso, luego  $U$  es  $\mu^*$ -medible cuando es abierto. Ya hemos visto que  $\mu(U) = \mu^*(U)$  cuando  $U$  es abierto.

De esta manera queda demostrado que todos los conjuntos contenidos en la  $\sigma$ -álgebra del teorema de Caratheodory son abiertos. En el Problema 3 se ha demostrado también que la intersección de cualquier serie de  $\sigma$ -álgebras en un conjunto dado es una  $\sigma$ -álgebra. Al ser siempre  $\mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra, se desprende que para *cualquier* serie  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  siempre existe una  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \bigcap \{ \mathcal{M} \supset \mathcal{E}; \text{ siendo } \mathcal{M} \text{ una } \sigma\text{-álgebra}; \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X) \}$$

Los elementos de la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene los conjuntos abiertos se conocen como "conjuntos de Borel", y la medida definida en la  $\sigma$ -álgebra de todos los conjuntos de Borel como *medida de Borel*. Lo que hemos demostrado es:

**Proposición 2.6.** *La medida definida por (1.11), (1.12) a partir de  $0 \leq u \in C_0(X)$  mediante el teorema de Caratheodory es una medida de Borel.*

*Prueba.* Esto es lo mismo que lo expresado en la Proposición 2.5. Observe lo sencillas que son las pruebas.

Podemos incluso seguir en la misma línea. Se dice que una medida de Borel es regular externa en  $E \subset X$  cuando

$$(2.6) \quad \mu(E) = \inf \{ \mu(U); U \supset E, U \text{ abierto} \} .$$

Por lo tanto, la medida construida en la Proposición 2.5 es regular externa en todos los conjuntos de Borel. Una medida de Borel es *regular interna* en  $E$  cuando

$$(2.7) \quad \mu(E) = \sup \{ \mu(K); K \subset E, K \text{ compacto} \} .$$

Llegados a este punto necesitamos saber que los conjuntos compactos son medibles según Borel. En esto consiste el Problema 5.

**Definición 2.7.** *Una medida de Radon (en un espacio métrico) es una medida de Borel que es regular y externa en todos los conjuntos de Borel, regular e interna en conjuntos abiertos y finita en conjuntos compactos.*

**Proposición 2.8** *La medida definida mediante (1.11), (1.12) a partir de  $0 \leq u \in (C_0(X))'$  aplicando el teorema de Caratheodory es una medida de Radon.*

*Prueba.* Supongamos que  $K \subset X$  es compacto. Llamemos  $\chi_K$  a la función característica de  $K$ ,  $\chi_K = 1$  en  $K$ ,  $\chi_K = 0$  en  $K^C$ . Supongamos asimismo que  $f \in C_0(X)$ ,  $\text{supp}(f) \Subset X$  y  $f \geq \chi_K$ . A continuación definimos

$$U_\epsilon = \{x \in X; f(x) > 1 - \epsilon\}$$

donde  $\epsilon > 0$  es un valor pequeño. Por lo tanto,  $U_\epsilon$  es abierto, por la continuidad de  $f$ , y contiene  $K$ . Además, podemos elegir  $g \in C(X)$ ,  $\text{supp}(g) \Subset U_\epsilon$ ,  $0 \leq g \leq 1$  con  $g = 1$  próximo a<sup>3</sup>  $K$ . Por lo tanto,  $g \leq (1 - \epsilon)^{-1}f$  y de ahí

$$\mu^*(K) \leq u(g) = (1 - \epsilon)^{-1}u(f).$$

Haciendo que  $\epsilon \downarrow 0$ , y utilizando la medibilidad de  $K$ ,

$$\mu(K) \leq u(f)$$

$$\Rightarrow \mu(K) = \inf \{u(f); f \in C(X), \text{supp}(f) \Subset X, f \geq \chi_K\}.$$

Esto implica, en particular, que  $\mu(K) < \infty$  si  $K \Subset X$ , aunque también prueba (2.7).

Hagamos un breve repaso de lo hecho hasta ahora. Hemos usado la funcional positiva  $u$  para definir una medida externa  $\mu^*$ , y por lo tanto una medida  $\mu$ , y a continuación hemos verificado las propiedades de ésta última.

Se trata de un esquema bastante interesante; ahora, anticipándonos a lo que expondré más adelante, sugiero pasar a ver algo distinto.

Digamos que  $Q \subset \mathbb{R}^n$  es "rectangular" cuando es un producto de intervalos finitos (abiertos, cerrados o medio abiertos)

$$(2.8) \quad Q = \prod_{i=1}^n (\text{or}[a_i, b_i] \text{ or } a_i \leq b_i)$$

---

<sup>3</sup> Indica "en un vecindario de  $K$ ".

estamos de acuerdo respecto a cuál es su volumen estándar:

$$(2.9) \quad v(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \in [0, \infty).$$

Es evidente que cuando tenemos dos conjuntos de esta clase,  $Q_1 \subset Q_2$ , entonces  $v(Q_1) \leq v(Q_2)$ . Intentaremos definir una medida externa sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  mediante

$$(2.10) \quad v^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i); A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, Q_i \text{ rectangular} \right\}.$$

Deseamos demostrar que (2.10) define una medida externa. Se trata de una demostración bien sencilla:  $v(\emptyset) = 0$ . Del mismo modo, si  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  son conjuntos (disjuntos) y

$\{Q_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$  abarca  $A_i$  mediante rectángulos abiertos, entonces el conjunto de todos los  $Q_{ij}$  abarcarán  $A = \bigcup_i A_i$  y

$$\begin{aligned} v^*(A) &\leq \sum_i \sum_j v(Q_{ij}) \\ &\Rightarrow v^*(A) \leq \sum_i v^*(A_i). \end{aligned}$$

Y ya tenemos la medida externa que buscábamos. También deseamos demostrar:

**Lema 2.9.** Si  $Q$  es rectangular;  $v^*(Q) = v(Q)$ .

Partiendo de esta suposición, la medida definida a partir de  $v^*$  mediante el teorema de Caratheodory se conoce como medida de Lebesgue.

**Proposición 2.10.** La medida de Lebesgue es una medida de Borel.

Para probar esta proposición nos basta con demostrar que los conjuntos rectangulares (abiertos) son  $v^*$ -medibles.

Supongamos que  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra en un conjunto  $X^4$  y  $\mathcal{N}$  es una  $\sigma$ -álgebra en otro conjunto  $Y$ . Se dice que un mapa  $f: X \rightarrow Y$  es medible con respecto a estas  $\sigma$ -álgebras dadas en  $X$  e  $Y$  cuando

$$(2.11) \quad f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \quad \forall E \in \mathcal{N}.$$

Fíjese en lo similar que es esta expresión a una de las caracterizaciones de la continuidad

---

<sup>4</sup> Luego  $X$  (o si prefiere decirlo de un modo más sofisticado,  $(X, \mathcal{M})$ ) se suele denominar como un *espacio medible*.

para mapas que se hallan entre espacios métricos en términos de conjuntos abiertos. Ciertamente se trata de una analogía que ofrece un resultado práctico.

**Proposición 2.11.** *Todo mapa continuo  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios métricos es medible con respecto a las  $\sigma$ -álgebras de Borel en  $X$  e  $Y$ .*

*Prueba.* El principal punto en el que hay que fijarse es que  $f^{-1}$ , al ser un mapa sobre conjuntos exponenciales, sirve perfectamente para *cualquier* mapa. Es decir; si  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  satisfará:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} f^{-1}(E^C) &= (f^{-1}(E))^C \\ f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(E_j) \\ f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}(E_j) \\ f^{-1}(\phi) &= \phi, \quad f^{-1}(Y) = X. \end{aligned}$$

Poniendo en común todas estas expresiones observamos que, si  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra cualquiera en  $X$ , entonces

$$(2.13) \quad \{E \subset Y; f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$$

es siempre una  $\sigma$ -álgebra en  $Y$ .

Volviendo a la prueba de la proposición, la continuidad de  $f$  demuestra que  $f^{-1}(E) \subset X$  es abierto cuando  $E \subset Y$  es abierto. Por lo tanto, la  $\sigma$ -álgebra en  $Y$  definida por (2.13) a partir de la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $X$  contiene todos los conjuntos abiertos, luego también contiene la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $Y$ :

$$f^{-1}(\mathcal{B}(Y)) \subset \mathcal{B}(X).$$

Nos interesan principalmente las funciones en  $X$ . Si  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $X$ ;  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  será medible cuando lo sea también con respecto a la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  y a  $\mathcal{M}$  en  $X$ . De un modo más general, para una función ampliada  $f: X \rightarrow [\infty, \infty]$  tomaremos como la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[\infty, \infty]$  la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contenga todos los subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$  y todos los conjuntos  $(a, \infty)$  y  $[-\infty, b)$ ; que de hecho viene generada por los conjuntos  $(a, \infty]$ . (Véase Problema 6.)

Nuestra principal tarea consiste en definir la integral de una función medible. Para ello partiremos de *funciones simples*. Hay que tener en cuenta que la función característica de un conjunto

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

es medible si y sólo si  $E \in \mathcal{M}$ . Más en general, una función simple;

$$(2.14) \quad f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$$

es medible si los conjuntos  $E_i$  son medibles. La presentación, (2.14), de una función simple no es única, aunque podemos hacer que lo sea, tomando la presentación mínima, insistiendo en que todos los  $a_i$  sean distintos de cero y

$$E_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$$

con lo que  $f$  en (2.14) es medible si y sólo si todos los  $E_i$  lo son.