SEGUNDO BOLETÍN DE PROBLEMAS DEL CURSO 18.155. OTOÑO 2002

Tenga presente que los textos de Folland [1] y Rudin [2] cubren la mayor parte del material tratado en las primeras clases. Estos problemas tienen que ver con el teorema de descomposición de medidas de Hahn, lo que daré por supuesto al probar el teorema de representación de Riesz.

Problema 1. Sea $(X,\mathcal{M})$ un conjunto con una σ-álgebra; y $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una medida finita en el sentido de que $\mu(\phi) = 0$, y que para cada:

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$$

con $E_i \cap E_j = \phi$ para $i \neq j$,

(0,1)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

con las series del lado derecho *siempre* absolutamente convergentes (es decir, que forma parte del requisito en μ). Defina:

(0,2)

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

para $E \in \mathcal{M}$ con el valor supremo por encima de *todas* las descomposiciones medibles $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con E_i disjunto. Demuestre que $|\mu|$ es una medida finita y positiva.

Pista 1. Debe demostrar que $|\mu|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i)$ si $\bigcup_i A_i = E$, $A_i \in \mathcal{M}$ siendo disjunto. Observe que si $A_j = \bigcup_l A_{jl}$ es una descomposición medible de A_j, que junto a A_{jl} nos da una descomposición de E. Del mismo modo, si $E = \bigcup_j E_j$ es cualquier descomposición del mismo tipo de E, $A_{jl} = A_j \cap E_l$ nos da una descomposición del mismo tipo de A_j.

Pista 2. Véase [2], pág. 117.

Problema 2. (Descomposición de Hahn)

Con las mismas suposiciones que en el Problema 1:

(1) Demuestre que $\mu_+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ y $\mu_- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$ son medidas positivas, $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Deberá llegar a la conclusión de que la definición de una medida con signo como la mera diferencia entre dos medidas positivas es la *misma* que la del Problema 1.

(2) Demuestre que las $\mu_\pm$ así construidas son ortogonales en el sentido de que existe un conjunto $E \in M$ tal que $\mu_-(E) = 0$, $\mu_+(X/E) = 0$.

Pista. Emplee la definición de $|\mu|$ para demostrar que para cualquier $F \in \mathcal{M}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto $F' \in \mathcal{M}$, $F' \subset F$ tal que $\mu_+(F') \geq \mu_+(F) - \varepsilon$ y $\mu_-(F') \leq \varepsilon$. Dado $\delta > 0$, aplique este resultado de forma repetida (por ejemplo, con $\varepsilon = 2^{-n}\delta$) para hallar una secuencia decreciente de conjuntos $F_1 = X$, $F_n \in \mathcal{M}$, $F_{n+1} \subset F_n$ tal que $\mu_+(F_n) \geq \mu_+(F_{n-1}) - 2^{-n}\delta$ y $\mu_-(F_n) \leq 2^{-n}\delta$. Deberá obtener como conclusión que $G = \cap_n F_n$ tiene $\mu_+(G) \geq \mu_+(X) - \delta$ y $\mu_-(G) = 0$. A continuación, elegiremos G_m de este modo con $\delta = 1/m$. Demuestre que $E = \bigcup_m G_m$ del modo que resulte conveniente.

Problema 3. Supongamos ahora que μ es una medida de Radon positiva y finita en un espacio métrico X localmente compacto (lo que significa una medida de Borel positiva y finita que es regular y externa en conjuntos de Borel y regular e interna en conjuntos abiertos). Demuestre que μ es regular e interna en todos los conjuntos de Borel y que, por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ y $E \in ß(X)$, existen conjuntos $K \subset E \subset U$ con K compacto y U abierto de tal modo que $\mu(K) \geq \mu(E) - \varepsilon$, $\mu(E) \geq \mu(U) - \varepsilon$.

Pista. Tome en primer lugar un U abierto y utilice *su* regularidad interna para hallar K con $K' \Subset U$ y $\mu(K') \geq \mu(U) - \varepsilon/2$. ¿Qué valor tiene $\mu(E/K')$? Halle $V \supset K'/E$ con V abierto y observe la igualdad $K = K'/V$.

Problema 4. Partiendo del Problema 3, demuestre que si μ es una medida de Borel finita en un espacio métrico X localmente compacto, las tres siguientes condiciones son equivalentes.

(1) $\mu = \mu_1 - \mu_2$ cuando μ_1 y μ_2 son ambas medidas de Radon finitas y positivas.
(2) $|\mu|$ es una medida de Radon finita y positiva.
(3) μ_+ y μ_- son medidas de Radon finitas y positivas.

REFERENCIAS

[1] G.B. Folland, *Real analysis*, Wiley, 1984
[2] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3ª edición, McGraw – Hill, 1987.