PRIMER BOLETÍN DE PROBLEMAS DEL CURSO 18.155. OTOÑO 2002

Tenga presente que los textos de Folland [1] y Rudin [2] cubren la mayor parte del material tratado en las primeras clases.

Varias de las cuestiones planteadas en este boletín no presentan ninguna dificultad.

Problema 1. Demuestre el lema de partición de la unidad expuesto en la clase del martes, 20 de septiembre:

Lema 0.1: *[Véase también la sección Material de clase]. Supongamos que U_i, $i = 1,...,N$ es una serie finita de conjuntos abiertos en un espacio métrico localmente compacto, y que $K \Subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ es un subconjunto compacto; por lo que existen funciones continuas $f_i \in C(X)$ con $0 \leq f_i \leq 1$, siempre que $(f_i) \Subset U_i$ y que*

(0,1) $\quad \sum_i f_i = 1 \quad$ *en una vecindad de K.*

Pista(s). Se entiende que todas las funciones que se muestran son continuas, sin que sea necesario que tengamos que insistir en ello cada vez.

(1) Recuerde, o compruebe, que la compacidad local de un espacio métrico X significa que para cada punto $x \in X$ existe un valor $\epsilon > 0$ tal que la esfera $\{y \in X; d(x,y) \leq \delta\}$ sea compacta para $\delta \leq \epsilon$.

(2) Resuelva en primer lugar el caso en el que $n = 1$, de modo que $K \Subset U$ sea un conjunto compacto en un subconjunto abierto.
   (a) Dado $\delta > 0$, aplique la compacidad local de X para cubrir K con un número finito de esferas cerradas compactas cuyo radio sea como máximo δ.
   (b) Deduzca que, si $\epsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño, el conjunto $\{x \in X; d(x,K) \leq \epsilon\}$, donde
   $$d(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y),$$
   es compacto.
   (c) Demuestre que $d(x,K)$ es continuo cuando K es compacto.
   (d) Dado $\epsilon > 0$, demuestre que existe una función continua $g_\epsilon\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $g_\epsilon(t) = 1$ para $t \leq \epsilon/2$ y $g_\epsilon(t) = 0$ para $t > 3\epsilon/4$.
   (e) Demuestre que $f = g_\epsilon \circ d(\ ,K)$ cumple las condiciones para $n = 1$ si $\epsilon > 0$ es un valor lo suficientemente pequeño.

(3) Demuestre el caso general mediante inducción sobre n.
   (a) En el caso general, defina:
   $$K' = K \cap U_1^{\complement}$$
   y demuestre que la hipótesis inductiva se puede aplicar a K' y a U_j para $j > 1$; siendo $f'_j, j = 2,...,n$ las funciones aportadas por la presunción inductiva y $f' = \sum_{j \geq 2} f'_j$.
   (b) Demuestre que $K_1 = K \cap \{f' \leq \frac{1}{2}\}$ es un subconjunto compacto de U_1.
   (c) Empleando el supuesto $n = 1$, construya una función F para K_1 y U_1.
   (d) Emplee de nuevo el supuesto $n = 1$ para hallar G de tal modo que $G = 1$ en K y suponiendo que $(G) \Subset \{f' + F > \frac{1}{2}\}$.
   (e) Interprete las funciones
   $$f_1 = F\frac{G}{f' + F},\ f_j = f'_j\frac{G}{f' + F},\ j \geq 2$$
   y demuestre que cumplen las presunciones inductivas.

Problema 2. Demuestre que las σ-álgebras son cerradas bajo intersecciones numerables.

Problema 3.Demuestre que, si μ es una medida completa y $E \subset F$, donde F es una variable medible de medida 0, $\mu(E) = 0$.

Problema 4. La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra más pequeña de un espacio topológico que contiene los conjuntos abiertos: sus elementos reciben el nombre de conjuntos de Borel.

(1) Explique por qué existe una σ-álgebra tan pequeña.
(2) Demuestre que los conjuntos compactos son conjuntos de Borel.

REFERENCIAS

[1] G.B. Folland, *Real analysis*, Wiley, 1984
[2] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3ª edición, McGraw – Hill, 1987.