10. OPERADORES DIFERENCIALES.

En este último tercio del curso aplicaremos lo aprendido hasta ahora sobre distribuciones, así como algunas otras nociones necesarias para comprender las propiedades de los operadores diferenciales con coeficientes constantes. Antes de pasar a explicar estas cuestiones, me gustaría probar otro resultado de densidad.

Hasta el momento *no* hemos definido una topología en $S'(\mathbb{R}^n)$, algo que dejaremos como ejercicio opcional[18]. Sí que veremos, en cambio, una noción de convergencia. Supongamos que $u_j \in\, < S'(\mathbb{R}^n)$ es una secuencia de S' ($\mathbb{R}^n$). Se dice que *converge débilmente* hacia $u \in\, < S'(\mathbb{R}^n)$ cuando

$$u_j(\varphi) \to u(\varphi)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{10.1}$$

En este caso no se presume "uniformidad", sino que más bien se trata de convergencia puntual (salvo que la linealidad de las funciones la hace parecer más fuerte).

Haga avanzar el texto para acceder a más contenidos

[18] Problema 34.

Proposición 10.1. *El subespacio $S(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ es débilmente denso; es decir, cada $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ es el límite débil de un subespacio $u_j \in S(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Podemos utilizar el teorema de la representación de Schwartz para escribir, para una m dependiente de u,

$$u = \langle x \rangle^m \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_\alpha \,, \; u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n) \,.$$

Sabemos que $S(\mathbb{R}^n)$ es densa en $L^2(\mathbb{R}^n)$ en el sentido de espacios métricos, luego podemos hallar $u_{\alpha,j} \in S(\mathbb{R}^n)$, $u_{\alpha,j} \to u_\alpha$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. El resultado de densidad provendrá entonces de las propiedades básicas de la convergencia débil.

Proposición 10.2. *Si $u_j \to u$ y $u'_j \to u'$ débilmente en $S'(\mathbb{R}^n)$ entonces $cu_j, \to cu$, $u_j + u'_j \to u + u'$, $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ y $\langle x \rangle^m u_j \to \langle x \rangle^m u$ débilmente en $S'(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Lo anterior se desprende de escribir todo en términos de pares; por ejemplo, si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$D^\alpha u_j(\varphi) = u_j((-1)^{(\alpha)} D^\alpha \varphi) \to u((-1)^{(\alpha)} D^\alpha \varphi) = D^\alpha u(\varphi) \,.$$

Esta densidad débil prueba que nuestras definiciones de D_j, y x_j x deben ser únicas si necesitamos que la Proposición 10.2 se mantenga.

Ya hemos visto el concepto de la diferenciación entendida como un operador (que consiste simplemente en una correlación lineal entre espacios de objetos tipo función).

$$D_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,.$$

Cualquier función polinómica en $\mathbb{R}^n$

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha \xi^\alpha \,, \; p_\alpha \in \mathbb{C}$$

define un operador diferencial[19]

$$p(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha D^\alpha u \,. \tag{10.2}$$

[19] Sería más correcto decir un operador diferencial parcial con coeficientes constantes.

Antes de pasar a tratar teoremas generales, veamos algunos ejemplos

(10.3) en $\mathbb{R}^2$, $\overline{\partial} = \partial x + i\partial y$ "operador d-bar"

(10.4) en $\mathbb{R}^n$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_j^2$ "laplaciano"

(10.5) en $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, $D_n^2 - \Delta$ "operador de ondas"

(10.6) en $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, $\partial_t + \Delta$ "operador de calor"

(10.7) en $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, $D_t + \Delta$ "operador de Schrödinger"

Se dice que las funciones, o distribuciones, que satisfagan ∂_u = 0 son *holomórficas*; mientras que las que satisfacen $\Delta_u = 0$ son *armónicas.*

Definición 10.3. *Se dice que un elemento* $E \in S'(\mathbb{R}^n)$ *que satisface*

$$P(D)E = \delta \tag{10.8}$$

es una solución fundamental (temperada) de of $P(D)$.

Teorema 10.4 (sin prueba). *Existe una solución fundamental temperada para todo operador diferencial de coeficiente constante distinto de cero*.

Este teorema es bastante difícil de probar y no tan interesante como pudiera parecer. En cualquier caso, daremos unos cuantos ejemplos, comenzando por ∂ Consideremos la función

$$E(x,y) = \frac{1}{2\pi}(x+iy)^{-1}\,, \quad (x,y) \neq 0\,. \tag{10.9}$$

Lema 10.5. $E(x, y)$ *es integrable localmente y por lo tanto define* $E \in S'(\mathbb{R}^2)$ *mediante*

$$E(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(x+iy)^{-1}\varphi(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{10.10}$$

siendo E así definida una solución fundamental temperada de $\overline{\partial}$.

Prueba. Dado que $(x+iy)^{-1}$ es uniforme y acotada lejos del origen, la integrabilidad local se desprende del cálculo, utilizando coordenadas polares.

$$\int_{|(x,y)|\leq 1}\frac{dx\,dy}{|x+iy|} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{r} = 2\pi\,. \tag{10.11}$$

Diferenciando directamente en la región en la que es uniforme,

$$\partial_x(x+iy)^{-1} = -(x+iy)^{-2}\,,\ \partial_y(x+iy)^{-1} = -i(x \in iy)^{-2}$$

por lo tanto,

$\overline{\partial}E = 0$ in $(x, y) \neq 0$.[20]

La derivada viene *en realidad* definida por

Aquí he cortado de la integral el espacio $\{|x| \leq \varepsilon , |y| < \varepsilon\}$ y he utilizado la integrabilidad local para tomar el límite como $\varepsilon \downarrow 0$. Integrando por partes en x hallamos

$$-\int_{\substack{|x|\geq\epsilon\\|y|\geq\epsilon}}(x+iy)^{-1}\partial_x\varphi\,dx\,dy = \int_{\substack{|x|\geq\epsilon\\|y|\geq\epsilon}}(\partial_x(x+iy)^{-1})\varphi\,dx\,dy$$
$$+\int_{\substack{|y|\leq\epsilon\\x=\epsilon}}(x+iy)^{-1}\varphi(x,y)\,dy - \int_{\substack{|y|\leq\epsilon\\x=-\epsilon}}(x+iy)^{-1}\varphi(x,y)\,dy\,.$$

Existe una formula correspondiente para la integración por partes en y luego, recordando que $\overline{\partial}E$= 0 desde (0, 0),

$$(10.13)\quad 2\pi\overline{\partial}E(\varphi) =$$
$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|y|\leq\epsilon}[(\epsilon+iy)^{-1}\varphi(\epsilon,y)-(-\epsilon+iy)^{-1}\varphi(-\epsilon,y)]\,dy$$
$$+\,i\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|x|\leq\epsilon}[(x+i\epsilon)^{-1}\varphi(x,\epsilon)-(x-i\epsilon)^{-1}\varphi(x,\epsilon)]\,dx\,,$$

suponiendo que ambos límites existen. Podemos escribir

$$\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + x\psi_1(x_1y) + y\psi_2(x,y)\,.$$

Sustituyendo φ bien por $x\psi_1$ o bien por $y\psi_1$ en (10.13) ambos límites son cero. Por ejemplo

$$\left|\int_{|y|\leq\epsilon}(\epsilon+iy)^{-1}\epsilon\psi_1(\epsilon,y)\,dy\right| \leq \int_{|y|\leq\epsilon}|\psi_1| \to 0\,.$$

Consiguientemente, obtendremos el mismo resultado en (10.13) sustituyendo $\varphi(x, y)$ por $\varphi(0, 0)$. Luego $2\pi\overline{\partial}E(\varphi) = c\,\varphi(0)$,

$$c = \lim_{\epsilon\downarrow 0} 2\epsilon\int_{|y|\leq\epsilon}\frac{dy}{\epsilon^2+y^2} = \lim_{\epsilon\downarrow 0} < \int_{|y|\leq 1}\frac{dy}{1+y^2} = 2\pi\,.$$

[20] En esta fase, por lo tanto, sabemos que $\overline{\partial}E$ debe ser una suma de derivadas de δ.

Recordemos que ya hemos visto la convolución de las funciones

$$u * v(x) = \int u(x-y)v(y)\,dy = v * u(x)\,.$$

Lo cual es factible, dado que u es de crecimiento lento y $s \in S(\mathbb{R}^n)$. De hecho, podemos rescribir la definición en términos de pares

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle \tag{10.14}$$

donde el · indica la variable del par.

Teorema 10.6. (Hörmander, Teorema 4.1.1). *Si* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *y* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $u * \varphi \in S'(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y si* $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset \mathbb{R}^n$.

$$\operatorname{supp}(u * \varphi) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi)\,.$$

Para cualquier multi-índice α

$$D^\alpha(u * \varphi) = D^\alpha u * \varphi = u * D^\alpha \varphi\,.$$

Prueba. Si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *entonces para cualquier* $x \in \mathbb{R}^n$ *fijado,*

$$\varphi(x - \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Los cálculos exigidos por la seminorma son

$$\sup_y (1 + |y|^2)^{k/2}\, |D^\alpha{}_y \varphi(x-y)| < \infty \;\forall\; \alpha, k > 0\,.$$

Dado que

$$D^\alpha{}_y \varphi(x-y) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \varphi)(x-y)$$

y

$$(1 + |y|^2) \leq (1 + |x-y|^2)(1 + |x|^2)$$

concluimos que

$$\|(1 + |y|^2)^{k/2} D^\alpha{}_y (x-y)\|_{L^\infty} \leq (1 + |x|^2)^{k/2} \|\langle y\rangle^k D^\alpha{}_y \varphi(y)\|_{L^\infty}\,.$$

La continuidad de $u \in S(\mathbb{R}^n)$ significa que para algunos valores de k

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \|(y)^k D^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$$

de donde se sigue que

$$|u * \varphi(x)| = |\langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle| \leq C(1 + |x|^2)^{k/2}\,. \tag{10.15}$$

El argumento anterior muestra que $x \mapsto \varphi(x - \cdot)$ es una función continua de $x \in \mathbb{R}^n$ con valores en $S(\mathbb{R}^n)$, luego $u * \varphi$ es continua y satisface (10.15), por lo que es un elemento de $S'(\mathbb{R}^n)$.

De la misma manera se obtiene la diferenciabilidad ya que para cada j con e_j el vector unitario j-ésimo

$$\frac{\varphi(x + se_j - y) - \varphi(x - y)}{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es continuo en $x \in \mathbb{R}^n$, s $\in \mathbb{R}$. Por consiguiente, $u * \varphi$ tiene derivadas parciales continuas y

$$D_j u * \varphi = u * D_j \varphi\,.$$

El mismo argumento demuestra entonces que $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Que $D_j(u * \varphi) = D_j(u * \varphi)$ se deriva de la definición de la derivación de las distribuciones

$$\begin{aligned} D_j(u * \varphi(x)) &= (u * D_j\varphi)(x) \\ &= \langle u, D_{x_j}\varphi(x - y)\rangle = -\langle u(y), D_{y_j}\varphi(x - y)\rangle_y \\ &= (D_j u) * \varphi\,. \end{aligned}$$

Por último, veamos la propiedad de soporte. Aquí suponemos que el soporte φ (supp(φ)) es compacto, y sabemos también que el soporte u (supp(u)) es un conjunto cerrado. Tenemos que demostrar que

$$\overline{x} \notin \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi) \tag{10.16}$$

implica $u * \varphi\ (x')= 0$ para x' próxima a $\overline{x}$. Ahora (10.16) significa que

$$\operatorname{supp} \varphi(\overline{x} - \cdot) \cap \operatorname{supp}(u) = \phi\,, \tag{10.17}$$

Dado que

$$\operatorname{supp} \varphi(x - \cdot) = \{y \in \mathbb{R}^n; x - y \in \operatorname{supp}(\varphi)\},$$

ambas expresiones significan que *no* existe $y \in$ supp(φ) con $\overline{x} - y \in$ supp(u). Lo que puede también escribirse:

$$\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp} u(x - \cdot) = \phi$$

y que, como hemos demostrado al ver los soportes, implica

$$u * \varphi(x') = \langle u(x' - \cdot), \varphi \rangle = 0\,.$$

Por (10.17) esta es una condición *abierta* en x', de donde se desprende la propiedad de soporte.

Supongamos ahora que φ, $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)\,. \tag{10.18}$$

Tenemos aquí el Lema de Hörmander 4.1.3 y el teorema de Hörmander 4.1.2; me interesa que lo prueben del modo del Problema 35.

Hemos demostrado que $u * \varphi$ es C^∞ cuando $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$; es decir, la regularidad de $u * \varphi$ se desprende de la regularidad de *uno* de los factores. Es razonable suponer, por lo tanto, que $u * \upsilon$ se puede definir cuando $u \in S(\mathbb{R}^n)$, $\upsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$ y una de ellas tiene soporte compacto.

Si $\upsilon \in C_c^\infty$ y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$u * v(\varphi) = \int \langle u(\cdot), v(x - \cdot)\rangle \varphi(x)\,dx = \int \langle u(\cdot), v(x - \cdot)\rangle \check{v}\varphi(-x)\,dx$$

donde

$$\check{\varphi}(z) = \varphi(-z).$$

De hecho, aplicando el Problema 35,

$$u * v(\varphi) = ((u * v) * \check{\varphi})(0) = (u * (v * \check{\varphi}))(0)\,. \tag{10.19}$$

Aquí υ, φ son uniformes, pero atención:

Lema 10.7. Si $\upsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tiene soporte compacto* y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces $\upsilon * \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Dado que $\upsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$, tiene soporte compacto existirá $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi\upsilon = \upsilon$. Luego

$$\begin{aligned} v * \varphi(x) &= (\chi v) * \varphi(x) = \langle \chi v(y), \varphi(x - y)\rangle_y \\ &= \langle u(y), \chi(y)\varphi(x - y)\rangle_y\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para algunos valores de k,

$$|v * \varphi(x)| \leq C\|\chi(y)\varphi(x - y)\|_{(k)}$$

donde $\| \|_{(k)}$ es una de nuestras normas en $S'(\mathbb{R}^n)$. Como χ tiene soporte en una bola de gran tamaño,

$$\begin{aligned}
\|\chi(y)\varphi(x-y)\|_{(k)} & \\
&\leq \sup_{|\alpha|\leq k} \left|\langle y\rangle^k D^\alpha{}_y(\chi(y)\varphi(x-y))\right| \\
&\leq C \sup_{|y|\leq R} \sup_{|\alpha|\leq k} |(D^\alpha\varphi)(x-y)| \\
&\leq C_N \sup_{|y|\leq R} (1+|x-y|^2)^{-N/2} \\
&\leq C_N(1+|x|^2)^{-N/2} .
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$(1+|x|^2)^{N/2}\,|v*\varphi|$$

es acotada para cada N. El mismo argumento sirve para la derivada empleando el Teorema 10.6, por lo que

$$v*\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

De hecho, obtenemos algo más, puesto que podemos ver que para cada k existe k' y C (que dependen de k y v) tal que

$$\|v*\varphi\|_{(k)}\leq C\|\varphi\|_{(k')} .$$

Lo que quiere decir que

$$v*:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es una correlación lineal continua.

(10.19) nos permite definir $u * v$ cuando $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto por

$$u*v(\varphi)=u*(v*\check{\varphi})(0) .$$

Empleando la continuidad a la que se hace referencia más arriba, se pide verificar que $u * v \in S'(\mathbb{R}^n)$ en el Problema 36. Por el momento, supondremos que esta convolución tiene las mismas propiedades que antes hemos visto; en el Problema 37 se pide verificar sus partes principales.

Recordemos que $E \in S'(\mathbb{R}^n)$ es una situación fundamental para $P(D)$, un operador diferencial de coeficiente constante, cuando $P(D)E = \delta$. También utilizamos una noción más débil.

Definición 10.8. *Una* paramétrica *para un operador diferencial de coeficiente constante* $P(D)$ *es una distribución* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$(10.20) \qquad P(D)F = \delta + \psi\,, \;\; \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

Se dice que un operador $P(D)$ *es* hipoelíptico *cuando tiene una paramétrica que satisface*

$$(10.21) \qquad \operatorname{sing\,supp}(F) \subset \{0\}\,,$$

donde, para cualquier $u \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$(10.22) \quad (\operatorname{sing\,supp}(u))^{\complement} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n;\, \exists \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \\ \varphi(\overline{x}) \neq 0, \varphi u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}\,.$$

Dado que la misma φ debe funcionar para puntos próximos en (10.22), el soporte singular (*sing supp*) del conjunto será cerrado. Asimismo,

$$(10.23) \qquad \operatorname{sing\,supp}(u) \subset \operatorname{supp}(u)\,.$$

En el Problema 37 se pide demostrar que si $K \Subset \mathbb{R}^n$ y $K \cap \operatorname{sing\,supp}(u) = \varnothing$; $\exists\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(x) = 1$ en un vecindario de K tal que

$$\varphi u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En particular,

$$(10.24) \qquad \operatorname{sing\,supp}(u) = \phi \Rightarrow u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

Teorema 10.9. Si $P(D)$ es hipoelíptico, entonces

$$(10.25) \qquad \operatorname{sing\,supp}(u) = \operatorname{sing\,supp}(P(D)u)\ \forall\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

Prueba. La mitad de esta expresión es válida para *cualquier* operador diferencial:

Lema 10.10. *Si* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *entonces, para cualquier polinomio*

$$(10.26) \qquad \operatorname{sing\,supp}(P(D)u) \subset \operatorname{sing\,supp}(u)\ \forall\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

Prueba. Se trata de demostrar que

$$\overline{x} \notin \operatorname{sing\,supp}(u) \Rightarrow \overline{x} \notin \operatorname{sing\,supp}(P(D)u).$$

A continuación, si $\overline{x} \notin$ sing supp(u) podemos hallar $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \equiv 1$ próximo a $\overline{x}$, tal que $\varphi\, u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$\begin{aligned} P(D)u &= P(D)(\varphi u + (1-\varphi)u) \\ &= P(D)(\varphi u) + P(D)((1-\varphi)u)\,. \end{aligned}$$

El primer término es C^{∞} y $\overline{x} \notin$ supp($P(D)$ ((1 – φ)u)), luego $\overline{x} \notin$ sing supp($P(D)u$).

Queda por demostrar el inverso de (10.26), suponiendo que $P(D)$ sea hipoelíptico. Tomamos F, una paramétrica de $P(D)$ con sing supp $u \subset \{0\}$ y suponemos, o mejor fijamos, que F tiene soporte compacto. De hecho, si $\overline{x} \notin$ sing supp($P(D)u$), podemos fijar que

$$(\mathrm{supp}(F) + \overline{x}) \cap \mathrm{sing\,supp}(P(D)u) = \phi\,.$$

A continuación, $P(D)F = \delta\, \psi$ con $\psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, luego

$$u = \delta * u = (P(D)F) * u - \psi * u.$$

Dado que $\psi * u \in C^{\infty}$; basta para probar que $\overline{x} \notin$ supp(($P(D)u$) $* f$).
Tomamos $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi\, f \in C^{\infty}$, $f = P(D)u$, aunque

$$(\mathrm{supp}\, F + \overline{x}) \cap \mathrm{supp}(\varphi) = 0\,.$$

Entonces,

$$f = f_1 + f_2,\ f_1 = \varphi f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

luego

$$f * F = f_1 * F + f_2 * F$$

donde $f_1 * F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\overline{x} \notin$ supp($f_2 * F$). De lo que resulta que $\overline{x} \notin$ singsupp(u).
Ejemplo 10.1. Si u es holomórfica en $\mathbb{R}^n$, $\overline{\partial} u = 0$, luego $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.
Recordemos que se dice que un operador diferencial $P(D)$ es hipoelíptico cuando existe $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ con

(10.27) $\qquad P(D)F - \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y sing supp(F) $\subset \{0\}$.

En este caso, la segunda condición indica que si $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi(x) = 1$ en $|x| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$; entonces $(1 - \varphi)F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dado que $P(D)((1 - \varphi)F) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ podemos concluir que

$$P(D)(\varphi F) - \delta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y también podemos suponer que F, sustituido ahora por φF, tiene soporte compacto. Ya demostramos en el caso anterior que

Si $P(D)$ es hipoelíptica y $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, entonces
sing supp(u) = sing supp$(P(D)u)$.

Más adelante recordaremos la prueba.

En primer lugar, no obstante, quisiera comentar un concepto importante: el de *elipticidad.* Recordemos que $P(D)$ "no es más que" un polinomio, conocido como el *polinomio característico*

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \xi^\alpha .$$

Que tiene la propiedad

$$\widehat{P(D)u}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi) \ \forall \ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) .$$

Esto demuestra (por si estuviera suficientemente claro) que podemos separar $P(\xi)$ de $P(D)$ concebido como un operador en $S'(\mathbb{R}^n)$.

Podemos considerar la posibilidad de *invertir* $P(D)$ dividiéndolo por $P(\xi)$, lo que funciona siempre que $P(\xi) \neq 0$. Un ejemplo de ello es

$$P(\xi) = |\xi|^2 + 1 = \sum_{j=1}^{n} +1 .$$

Sin embargo, ni siquiera el operador laplaciano,

$$\Delta = \textstyle\sum_{j=1}^{n} D_j^2,$$

satisface una condición tan estricta como esta.

Es razonable suponer que las derivadas de orden superior sean las de mayor importancia. Consideremos, por lo tanto,

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} C_\alpha \xi^\alpha$$

como la parte principal, o *símbolo principal*, de $P(D)$.

Definición 10.11. *Se dice que un polinomio $P(\xi)$, o $P(D)$, es elíptico de orden m siempre que $P_m(\xi) \neq 0$ para todo $0 \neq \in \mathbb{R}^n$.*

Lo que me gustaría demostrar hoy es

Teorema 10.12. *Todo operador diferencial elíptico $P(D)$ es hipoelíptico.*

Deseamos hallar una *paramétrica* para $P(D)$; ya sabemos que podríamos también suponer que F tiene soporte compacto. Tomando la transformada de Fourier vista en (10.27) observamos que $\hat{F}$ debería satisfacer

$$P(\xi)\widehat{F}(\xi) = 1 + \widehat{\psi},\ \widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{10.28}$$

Aquí aplicamos

$$\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

por lo que también $\hat{\psi} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Supongamos, en primer lugar, que $P(\xi) = P_m(\xi)$ es en realidad un operador homogéneo de grado m. Por tanto

$$P_m(\xi) = |\xi|^m\, P_m(\widehat{\xi}),\ \widehat{\xi} = \xi/\,|\xi|\ ,\ \xi \neq 0\,.$$

La presunción de elipticidad implica que

$$P_m(\widehat{\xi}) \neq 0\ \forall\ \widehat{\xi} \in \mathcal{S}^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| = 1\}\ . \tag{10.29}$$

Teniendo en cuenta que S^{n-1} *is compacto* y P_m es continuo

$$\left|P_m(\widehat{\xi})\right| \geq C > 0\ \forall\ \widehat{\xi} \in \mathcal{S}^{n-1}\,, \tag{10.30}$$

para una constante C. Aplicando la homogeneidad,

$$\left|P_m(\widehat{\xi})\right| \geq C\,|\xi|^m\ ,\ C > 0\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n\ . \tag{10.31}$$

A continuación, para obtener $\hat{F}$ a partir de (10.28) deberemos dividir por $P_m(\xi)$ o multiplicar por $1/P_m(\xi)$. El único problema a la hora de definir $1/P_m(\xi)$ se encuentra en $\xi = 0$. La manera de evitar este punto es seleccionar $P \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ al igual que antes, con $\varphi(\xi) = 1$ en $|\xi| \leq 1$.

Lema 10.13. *Si* $P_m(\xi)$ *es homogéneo de grado m y elíptico, entonces*

$$Q(\xi) = \frac{(1-\varphi(\xi))}{P_m(\xi)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \tag{10.32}$$

es la transformada de Fourier de una paramétrica para $P_m(D)$*, que satisfaga* (10.27).

Prueba. Está claro que $Q(\xi)$ es una función continua y $|Q(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-m}\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, luego $Q \in S'(\mathbb{R}^n)$. Consecuentemente, es la transformada de Fourier de un $F \in S'(\mathbb{R}^n)$. Asimismo,

$$\widehat{P_m(D)F}(\xi) = P_m(\xi)\widehat{F} = P_m(\xi)Q(\xi)$$
$$= 1 - \varphi(\xi)\,,$$
$$\Rightarrow P_m(D)F = \delta + \psi\,,\ \widehat{\psi}(\xi) = -\varphi(\xi)\,.$$

Dado que

$$\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

F es una paramétrica para $P_m(D)$. Pero aún nos queda por probar la "parte dura"; es decir, que

$$\text{(10.33)} \qquad \operatorname{sing\,supp}(F) \subset \{0\}\ .$$

Podemos demostrar (10.33) fijándonos en las distribuciones $x^\alpha F$. La idea es que para un valor alto de $|\alpha|$, x^α disminuye de un modo bastante rápido en el origen, lo que debería "debilitar" la singularidad de F en ese punto. En realidad, deberíamos demostrar que

$$\text{(10.34)} \qquad x^\alpha F \in H^{|\alpha|+m-n-1}(\mathbb{R}^n)\,,\ |\alpha| > n+1-m\,.$$

Recordemos que estos espacios de Sobolev se hallan definidos en términos de la transformada de Fourier, lo que quiere decir que debemos demostrar

$$\widehat{x^\alpha F} \in \langle\xi\rangle^{-|\alpha|-m+n+1} L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

A continuación,

$$\widehat{x^\alpha F} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha{}_\xi \widehat{F},$$

por tanto, lo que debemos tener en cuenta es el comportamiento de las derivadas de $\hat{F}$, que es $Q(\xi)$ en (10.32)

Lema 10.14. *Sea $P(\xi)$ un polinomio de grado m que cumple*

(10.35) $\quad |P(\xi)| \geq C\,|\xi|^m$ *en* $|\xi| > 1/C$ *para algún* $C > 0$.

luego para algunas constantes C_α

$$\text{(10.36)} \qquad \left| D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} \right| \leq C_\alpha\,|\xi|^{-m-|\alpha|}$$

en $|\xi| > 1/C$

Prueba. El cálculo de (10.36) para $\alpha = 0$ es de nuevo (10.35). La prueba del valor más alto supone calcular la existencia para cada α de un polinomio cuyo grado ha de ser como máximo $(m - 1)$ tal que

$$D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} = \frac{L_\alpha(\xi)}{(P(\xi))^{1+|\alpha|}}. \tag{10.37}$$

Una vez conocido (10.37), obtenemos directamente (10.36) a partir de

$$\left| D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} \right| \leq \frac{C'_\alpha |\xi|^{(m-1)|\alpha|}}{C^{1+|\alpha|} |\xi|^{m(1+|\alpha|)}} \leq C_\alpha |\xi|^{-m-|\alpha|} .$$

Podemos probar (10.37) por inducción, puesto que es cierto para $\alpha = 0$. Supongamos que es también cierto para $|\alpha| \leq k$. Para obtener una misma identidad para cada β con $|\beta| = k + 1$, basta con diferenciar una vez una de las identidades con $|\alpha| = k$. De esta manera

$$D^\beta \frac{1}{P(\xi)} = D_j D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} = \frac{D_j L_\alpha(\xi)}{P(\xi)^{1+|\alpha|}} - \frac{(1+|\alpha|) L_\alpha D_j P(\xi)}{(P(\xi))^{2+|\alpha|}} .$$

Al ser

$$L_\beta(\xi) = P(\xi) D_j L_\alpha(\xi) - (1+|\alpha|) L_\alpha(\xi) D_j P(\xi)$$

un polinomio cuyo grado es, como máximo, $(m-1)\,|\alpha| + m - 1\,|\beta|$, el lema queda demostrado.

Volviendo hacia atrás, nos fijamos en que

$$Q(\xi) = \frac{1-\varphi}{P_m(\xi)}$$

es uniforme en $|\xi| \leq 1/C$, luego (10.36) implica

$$|D^\alpha Q(\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{-m-|\alpha|} \tag{10.38}$$

$$\Rightarrow \langle \xi \rangle^\ell D^\alpha Q \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ if } \ell - m - |\alpha| < -\frac{n}{2},$$

lo que ciertamente sigue siendo válido cuando

$$\ell = |\alpha| + m - n - 1,$$

dando como resultado (10.34). Ahora, por el teorema de la inmersión de trazas de Sobolev

$$x^\alpha F \in \mathcal{C}^k \text{ if } |\alpha| > n + 1 - m + k + \frac{n}{2}.$$

Lo que quiere decir, concretamente, que si elegimos $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \notin \operatorname{supp}(\mu)$, entonces, para cada k, $\mu / |x|^{2k}$ es uniforme y

$$\mu F = \frac{\mu}{|x|^{2k}} |x|^{2k} F \in C^{2\ell - 2n}, \ \ell > n .$$

De este modo, $\mu F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, y esto es lo que pretendíamos demostrar, sing supp(F) $\subset \{0\}$.

Así pues ya hemos demostrado que $P_m(D)$ es hipoelíptico cuando es elíptico. Me permitirán ustedes que, en vez de verificarlo repitiendo de nuevo la prueba, vaya al supuesto general y lo repase desde allí.

Prueba. *Prueba del teorema.* Necesitamos demostrar que si $P(\xi)$ es elíptico, $P(D)$ tendrá una paramétrica F como en (10.27). De lo visto anteriormente resulta que la elipticidad de $P(\xi)$ implica (y es equivalente a)

$$|P_m(\xi)| \geq c\,|\xi|^m , \ c > 0 .$$

Por otro lado,

$$P(\xi) - P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| < m} C_\alpha \xi^\alpha$$

es un polinomio de grado máximo $m - 1$, luego

$$|P(\xi) - P_m(\xi)|\, 2 \leq C'(1 + |\xi|)^{m-1} .$$

Lo que supone que si $C > 0$ es lo suficientemente grande en $|\xi| > C$, $C'(1 + |\xi|)^{m-1} < c/2\, |\xi|^m$, luego

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &\geq |P_m(\xi)| - |P(\xi) - P_m(\xi)| \\ &\geq c\,|\xi|^m - C'(1 + |\xi|)^{m-1} \geq \frac{c}{2}\,|\xi|^m . \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $P(\xi)$ cumple por sí mismo las condiciones del Lema 10.14.
Por consiguiente, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es igual a 1 en una bola lo suficientemente grande, entonces $Q(xi) = (1 - \varphi(\xi))/P(\xi)$ en C^∞ y cumplirá (10.36), lo que podemos expresar como

$$|D^\alpha Q(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|} .$$

Así, la explicación anterior muestra que obtenemos una solución a (10.27) definiendo $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ mediante $\hat{F}(\xi) = Q(\xi)$.

El último paso de la prueba consiste en mostrar que si $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto y satisface (10.27), entonces

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ P(D)u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$
$$\Rightarrow u = F * (P(D)u) - \psi * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

Tratemos ahora de perfeccionar este resultado.

Proposición 10.15. *Si* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\mu \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tiene soporte compacto, entonces*

$$\operatorname{sing\,supp}(u * f) \subset \operatorname{sing\,supp}(u) + \operatorname{sing\,supp}(f)\,.$$

Prueba. Necesitamos demostrar que $p, \notin$ sing supp(u) $\in$ sing supp(f) luego $p \notin$ sing supp($u * f$). Una vez hayamos fijado p, podemos suponer que f tiene también soporte compacto. De hecho, elegiremos una bola grande $B(R,0)$, de tal modo que

$$z \notin B(0,R) \Rightarrow p \notin \operatorname{supp}(u) + B(0,R)\,.$$

Esto es posible por el acotamiento asumido de supp(u). Elegiremos entonces $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi = 1$ en $B(0, R)$; del Teorema L16.2, o más bien de su ampliación a las distribuciones, se desprende que $\varnothing \notin$ supp($u(1 - \varphi)f$), luego podemos sustituir f por φf teniendo en cuenta que sing supp(φf) $\subset$ sing supp(f). Si f tiene soporte compacto podremos elegir los vecindarios compactos K_1, K_2 del sing supp(u) y del sing supp(f) de tal modo que $p \notin K_1 + K_2$. Podemos además descomponer $u = u_1 + u_2$, $f = f_1 + f_2$ de modo que supp(u_1) $\subset K_1$, supp (f_2) $\subset K_2$ y $u_2, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De donde resulta

$$u * f = u_1 * f_1 + u_2 * f_2 + u_1 * f_2 + u_2 * f_2\,.$$

Ahora, $p \notin$ supp($u_1 * f_1$) por la propiedad de soporte de la convolución; y los otros tres términos son C^∞ ya que al menos uno de los factores es C^∞. En consecuencia, $p \notin$ supp($u * f$).

El ejemplo más importante de operador diferencial que es hipoelíptico, pero no elíptico, es el operador de calor.

$$\partial_t + \Delta = \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2\,. \tag{10.39}$$

De hecho la distribución

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{10.40}$$

es una solución fundamental. En primer lugar, deberemos verificar que E es una distribución. Evidentemente, E es C^∞ en $t > 0$. Además, a medida que t $\downarrow$ en $x \neq 0$ disminuye con todas las derivadas también lo hace C^∞, excepto en $t = 0$, $x = 0$. Al ser claramente medible, verificaremos que es localmente integrable cerca del origen, es decir,

$$\int_{\substack{0\le t\le 1\\ |x|\le 1}} E(t,x)\; dx\, dt < \infty\,, \tag{10.41}$$

ya que $E > 0$. Podemos cambiar las variables, fijando $X = x/t^{1/2}$, con lo que $dx = t^{n/2}\, dX$ y la integral pasa a ser

$$\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^{\prime} \int_{|X|\le t^{-1/2}} \exp(-\frac{|X|^2}{4})\, dx\, dt \;\; < \infty\,.$$

Como E es acotada cerca del infinito, resulta que $E \in S' \mathbb{R}^n$,

$$E(\varphi) = \int_{t\ge 0} E(t,x)\varphi(t,x)\, dx\, dt \;\forall\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})\,.$$

Al igual que antes, deseamos calcular

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Delta)E(\varphi) &= E(-\partial_t\varphi + \Delta\varphi) \\ &= \lim_{\mathcal{E}\downarrow 0} \int_{\mathcal{E}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)(-\partial_t\varphi + \Delta\varphi)\, dx\, dt\,. \end{aligned} \tag{10.42}$$

En primer lugar comprobaremos que $(\partial_t + \Delta)E = 0$ en $t > 0$, donde es una función C^∞. Se trata de un cálculo sencillo:

$$\begin{aligned} \partial_t E &= -\frac{n}{2t}E + \frac{|x|^2}{4t^2}E \\ \partial_{x_j} E &= -\frac{x_j}{2t}E\,,\; \partial^2_{x_j} E = -\frac{1}{2t}E + \frac{x_j^2}{4t^2}E \\ \Rightarrow \Delta E &= \frac{n}{2t}E + \frac{|x|^2}{4t^2}E\,. \end{aligned}$$

A continuación podemos integrar por partes en (10.42) para obtener

$$(\partial_t + \Delta)E(\varphi) = \lim_{\mathcal{E}\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathcal{E},x)\frac{e^{-|x|^2/4\mathcal{E}}}{(4\pi\mathcal{E})^{n/2}}\, dx\,.$$

Y efectuando el mismo cambio de variables que hicimos antes, $X = x/2\mathcal{E}^{1/2}$,

$$(\partial_t + \Delta)E(\varphi) = \lim_{\mathcal{E}\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathcal{E}, \mathcal{E}^{1/2}X) \frac{e^{-|x|^2}}{\pi^{n/2}}\, dX\,.$$

Como $\mathcal{E} \downarrow 0$, la integral se halla aquí acotada por la función integrable $C\exp(-|X|^2)$, para alguna $C > 0$, así que por el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, conduce a la integral del límite. Es decir

$$\varphi(0,0) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} \frac{dx}{\pi^{n/2}} = \varphi(0,0)\,.$$

Por consiguiente

$$(\partial_t + \Delta)E(\varphi) = \varphi(0,0) \Rightarrow (\partial_t + \Delta)E = \delta_t \delta_x\,,$$

lo que demuestra que E es una solución fundamental. Dado que decrece en $t < 0$, se le etiqueta como solución *fundamental hacia adelante*. Veamos ahora para qué podemos utilizarla.

Proposición 10.16. *Si* $f \in S'\mathbb{R}^n$ tiene soporte compacto $\exists! u \in S'\mathbb{R}^n$ *con* $\operatorname{supp}(m) \subset \{t \geq -T\}$ *para alguna* T *y*

$$(\partial_t + \Delta)u = f \ \ in\ \mathbb{R}^{n+1}\,. \tag{10.43}$$

Prueba. Naturalmente, probaremos $u = E * f$, que cumple (10.43) por las propiedades de convolución. Del mismo modo, si T es tal que $\operatorname{supp}(f) \subset \{t \geq T\}$, tenemos

$$\operatorname{supp}(u) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(E) \subset \{t \geq T]\ .$$

A continuación necesitamos demostrar la *unicidad*. Si $u_1, u_2 \in S'\mathbb{R}^n$ en dos soluciones de (10.43), su diferencia $v = u_1 - u_2$ satisfará la ecuación "homogénea" $(\partial_t + \Delta)v = 0$. Asimismo, $v = 0$ en $t < T'$ para alguna T'.

Dada cualquier $E \in \mathbb{R}$ elegiremos $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $\varphi(t) = 0$ en $t > \overline{t} + 1$, $\varphi(t) = 1$ en t $< \overline{t}$ y consideraremos

$$E_{\overline{t}} = \varphi(t)E = F_1 + F_2\,,$$

donde $F_1 = \psi E_{\overline{t}}$ para alguna $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, ψ próxima a 0. Por tanto, F_1 tiene soporte compacto y de hecho $F_2 \in S(\mathbb{R}^n)$. Comprueben ustedes esta última expresión como el Problema L18.P1.

En cualquier caso,

$$(\partial_t + \Delta)(F_1 + F_2) = \delta + \psi \in \mathcal{S}\mathbb{R}^n\,,\ \psi_{\overline{t}} = 0\ t \leq \overline{t}\,.$$

A continuación,

$$(\partial_t + \Delta)(E_t * u) = 0 = u + \psi_{\overline{t}} * u\,.$$

Dado que

$$\operatorname{supp}(\psi_{\overline{t}}) \subset \{t \geq \overline{t}],$$

la segunda fila es soportada aquí en $t \geq \overline{t} \geq T'$. Por tanto, $u = 0$ en $t < \overline{t} + T'$, pero $\overline{t}$ es arbitrario.

Hay que tener en cuenta que la suposición de que $u \in S' \mathbb{R}^n$ no es redundante en el enunciado de la Proposición: si se admiten soluciones "grandes", éstas pierden su unicidad. En el Problema L18.P2 se pide aplicar la solución fundamental para resolver el problema del valor inicial del operador de calor.

A continuación haremos un uso similar de la solución fundamental aplicada al operador de Laplace. Si $n \geq 3$

$$E = C_n\,|x|^{-n+2} \tag{10.44}$$

es una solución fundamental. Es preciso verificar que $\Delta E_n = 0$ en $x \neq 0$ directamente, más adelante demostraré que $\Delta E_n = \delta$ para la elección apropiada de C_n, pero ustedes pueden hacerlo directamente, como en el supuesto $n = 3$.

Teorema 10.17. *Si* $f \in S\mathbb{R}^n$ $\exists! u \in C_0^\infty \mathbb{R}^n$ *tal que* $\Delta u = f$.

Prueba. Definida la convolución

$$u = E * f \in \mathcal{S}'\mathbb{R}^n \cap \mathcal{C}^\infty\mathbb{R}^n$$

obtenemos por esta vía una solución a $\Delta u = f$. Necesitamos comprobar que $u \in C_0^\infty \mathbb{R}^n$.
Sabemos, en primer lugar, que Δ es hipoelíptico, por lo que podemos descomponer

$$E = F_1 + F_2\,,\ F_1 \in \mathcal{S}'\mathbb{R}^n\,,\ \operatorname{supp} F, \Subset \mathbb{R}^n$$

y a continuación $F_2\ C^\infty\ \mathbb{R}^n$. En realidad podemos ver en (10.44) que

$$|D^\alpha F_2(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{-n+2-|\alpha|}\,.$$

Como hemos demostrado más arriba, $F_1 * f \in S\mathbb{R}^n$, y continuando la integral vemos que

$$\begin{aligned}|D^\alpha u| &\leq |D^\alpha F_2 * f| + C_N(1 + |x|)^{-N}\ \forall\ N\\ &\leq C'_\alpha(1 + |x|)^{-n+2-|\alpha|}\,.\end{aligned}$$

De $n > 2$ se desprende que $u \in C_c^\infty \mathbb{R}^n$.

De esta forma sólo se mantiene la unicidad. Si existen dos soluciones, u_1, u_2 para una f dada, entonces

$$v = u_1 - u_2 \in C_0^\infty \mathbb{R}^n$$

satisface $\Delta v = 0$. Como v $\in S'\mathbb{R}^n$, podemos aplicar la transformada de Fourier y comprobar que

$$|\chi|^2 \widehat{v}(\chi) = 0 \Rightarrow \operatorname{supp}(\widehat{v}) \subset \{0\} \ .$$

un problema anterior consistía en partir de aquí para obtener como conclusión

$$\widehat{v} = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta$$

para algunas constantes C_a. Esto, a su vez, implica que v es un polinomio. Sin embargo, los únicos polinomios en $C_0^0 \mathbb{R}^n$ son idénticamente 0. De donde se deduce la unicidad y que v = 0.

La próxima vez hablaré sobre distribuciones homogéneas. En $\mathbb{R}$ las funciones

$$x_t^s = \begin{cases} x^s & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

donde $S \in \mathbb{R}$ es localmente integrable (y, en consecuencia, es una distribución temperada) precisamente cuando $S > -1$. Como función, es homogénea de grado s. Por lo tanto, si $\alpha > 0$ tenemos

$$(ax)_t^s = a^s x_t^s \ .$$

Si consideramos x_t^s $= \mu$ como una distribución podemos fijar esto como

$$\begin{aligned} \mu_s(ax)(\varphi) &= \int \mu_s(ax)\varphi(x)\, dx \\ &= \int \mu_s(x)\varphi(x/a)\frac{dx}{a} \\ &= a^s \mu_s(\varphi) \, . \end{aligned}$$

Por tanto, si *definimos*

$$\varphi_a(x) = \tfrac{1}{a}\varphi(\tfrac{x}{a}),$$

para cualquier $a > 0$, $\varphi \in S\,\mathbb{R}$ podemos plantearnos si una distribución es homogénea:

$$\mu(\varphi_a) = a^s \mu(\varphi) \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,.$$