

CUARTO BOLETÍN DE EJERCICIOS DEL CURSO 18.155

Aceptaré como trabajo para la semana la presentación de un solo problema del boletín, especialmente si se trata de estudiantes de licenciatura. Tenga presente que el primer problema se considera el resultado más intrincado de la teoría "elemental" de la distribución.

Problema 1. (Teorema del núcleo de Schwartz).

- (1) Demuestre (a partir, sobre todo, de lo visto en clase) que la topología de $S(\mathbb{R}^n)$ puede expresarse como el límite proyectivo de las topologías de Hilbert en los espacios de Sobolev con pesos $(x)^{-k}H^k(\mathbb{R}^n)$ a medida que $k \rightarrow \infty$.
- (2) Obtenga como conclusión que el espacio dual $S'(\mathbb{R}^n)$ se puede convertir en topológico como límite inductivo de los espacios de Sobolev con pesos $(x)^kH^k(\mathbb{R}^n)$ a medida que $k \rightarrow \infty$.
- (3) Demuestre que la transformación de Fourier, la multiplicación por $(x)^m$ para cualquier valor de m y el mapa $(D)^m$ (definido como el mapa precedente conjugado mediante la transformación de Fourier) son isomorfismos tanto de $S(\mathbb{R}^n)$ como de $S'(\mathbb{R}^n)$.
- (4) Demuestre que, para un mapa lineal (para un operador)

$$(0.1) \quad A: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$

la continuidad con respecto a estas topologías es equivalente a la existencia de un k tal que A se extienda por continuidad (en las normas de Hilbert) a $A: (x)^{-k}H^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow (x)^kH^k(\mathbb{R}^n)$.

- (5) Demuestre cómo componer A en el lado derecho y en el izquierdo con los mapas del apartado (3) y llegar a un mapa lineal continuo A' de $H^{-n}(\mathbb{R}^n)$ a $H^n(\mathbb{R}^n)$.
- (6) Teniendo en cuenta el teorema de la inmersión de trazas de Sobolev y que la "función" delta en cualquier punto se halla en $H^{-n}(\mathbb{R}^n)$, obtenga como conclusión que la fórmula $a(x,y) = (A'(\delta,))(x)$ define una función acotada continua en \mathbb{R}^{2n} .
- (7) Demuestre que el mapa

$$S(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^{2n}), \quad (\phi, \psi) \mapsto \phi \boxtimes \psi(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

es continuo de modo conjunto (es decir, es continuo en la topología métrica del producto).

- (8) Demuestre que, si $\beta \in S'(\mathbb{R}^{2n})$, la fórmula

$$(0.2) \quad (B\psi)\phi = \beta(\phi \boxtimes \psi) \quad \forall \phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$$

define un mapa lineal continuo $B: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$.

- (9) Volviendo al apartado (6), demuestre que a , considerada como una distribución, define A' de este modo.
- (10) Llegue a la conclusión de que cada operador lineal continuo (0.1) proviene de la construcción (0.2).
- (11) Si ha conseguido llegar hasta aquí y se siente aún con fuerzas, demuestre mediante (0.2) que, a la inversa, β viene determinada por B , hasta llegar al teorema del núcleo de Schwartz.
- (12)

Teorema 0.1. Existe una correspondencia de 1 a 1 entre los mapas lineales continuos

$$(0.3) \quad A: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$

y elementos de $S'(\mathbb{R}^{n+n'})$.

Problema 2. Calcule el comportamiento elemental de la ecuación de calor.

- i) Demuestre que la función en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, para $n \geq 1$,

$$F(t, x) = \begin{cases} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

es medible, acotada en cualquier conjunto $\{|(t,x)| \geq R\}$ e integrable en $\{|(t,x)| \leq R\}$ para todo $R > 0$.

- ii) Obtenga como conclusión que F define una distribución temperada en \mathbb{R}^{n+1} .

- iii) Demuestre que F es C^∞ fuera del origen.
- iv) Demuestre que F cumple la ecuación de calor

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2)F(t, x) = 0$$

en $(t, x) \neq 0$.

- v) Demuestre que F cumple
- (0.4) $F(s^2t, sx) = s^{-n}F(t, x)$ en $S'(\mathbb{R}^{n-1})$.

Estando definido el lado izquierdo de la ecuación por la dualidad " $F(s^2t, sx) = F_s$ ", donde

$$F_s(\phi) = s^{-n-2}F(\phi_{1/s}), \quad \phi_{1/s}(t, x) = \phi\left(\frac{t}{s^2}, \frac{x}{s}\right).$$

- vi) Obtenga como conclusión

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2)F(t, x) = G(t, x)$$

donde $G(t, x)$ cumple

- (0.5) $G(s^2t, sx) = s^{-n-2}G(t, x)$ en $S'(\mathbb{R}^{n-1})$.

en el mismo sentido de arriba y tiene soporte como máximo $\{0\}$.

- vii) De donde se deduce

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2)F(t, x) = c\delta(t)\delta(x)$$

(0.6)

para una constante real c .

Pista: compruebe qué distribuciones con soporte en $(0,0)$ cumplen (0.5).

- viii) Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ demuestre que $u = F \star \psi$ cumple

- (0.7) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ y

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \in [-S, S]} (1 + |x|)^N |D^\alpha u(t, x)| < \infty \quad \forall S > 0, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, N.$$

- ix) Suponiendo que u cumple (0.7) y que es una solución de valor real de

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2)u(t, x) = 0$$

en \mathbb{R}^{n+1} , demuestre que

$$v(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u^2(t, x)$$

es una función no incremental de t .

Pista: multiplique la ecuación por u e intégreala sobre un tramo $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}$

- x) Demuestre que el valor de c en (0.6) es distinto de cero, llegando a una solución contradictoria a partir de la suposición de que su valor es cero. Se trata de probar que, si $c = 0$, el valor de u en viii) cumple las condiciones de ix) y que, asimismo, se anula en $t < T$ para parte de T (dependiendo de ψ). Obtenga como conclusión que $u = 0$ para todo ψ . Demuestre por último, aplicando las propiedades de la convolución, que ello implica a su vez que $F = 0$, lo que es una contradicción.

- xi) Por fin ya sabemos que $E = 1/3 F$ es una solución fundamental de la ecuación de calor que se anula en $t < 0$. Explique por qué este dato nos permite demostrar que

para todo $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ existe una solución de

$$(0.8) \quad (\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2)u = \psi, \quad u = 0$$

en $t < T$ para parte de T .

¿Cuál es el valor más alto de T para el que se cumple esta premisa?

- xii) Dé una explicación heurística, lo más rigurosa posible, de por qué:

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4}\right) dx.$$