TERCER BOLETÍN DE EJERCICIOS DEL CURSO 18.155

Estos problemas se corresponden con los números 24 a 30 de los apuntes de la página web.

Problema 1. Demuestre la continuidad en la media de las funciones L^2 en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\sup_{|t|<\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+t) - u(x)|^2 dx \to 0$$

a medida que $\epsilon \to 0$

Para ello, es muy posible que deba partir de principios básicos. Comience por demostrar que es suficiente con suponer que $u \geq = 0$ es de soporte compacto, para a continuación probar que basta con suponer que u es una función simple e integrable. Finalmente, fíjese en la definición de la medida de Lebesgue y demuestre que si $E \subset \mathbb{R}^n$ es una medida de Borel y tiene una medida de Lebesgue finita, entonces

$$\lim_{|t| \to \infty} \mu(E \backslash (E+t)) = 0$$

donde μ = medida de Lebesgue y

$$E + t = \{p \in \mathbb{R}^n \,;\, p' + t \,,\, p' \in E\} \;.$$

Problema 2. Demuestre la fórmula de Leibniz

$$D_x^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta \varphi \cdot D_x^{\alpha-\beta}\psi$$

para cualquier función C^∞ y para φ y ψ. α y β son aquí multiíndices; $\beta \leq \alpha$ indica que $\beta_j \leq \alpha_j$ para cada j y que

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_j \binom{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Recomiendo resolverlo mediante inducción.

Problema 3. Partiendo de un resultado obtenido en clase, demuestre que $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, suponiendo que $(u) \subset \{0\}$ (lo que significa que $u(\phi) = 0$ para todo $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, de tal modo que $\phi = 0$ en $|x| < \epsilon$ para algunos valores $\epsilon > 0$) implica que existen constantes c_α para $|\alpha| \leq m$, para algunos valores de m, de tal modo que

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta.$$

Pista. Atención: este problema no es tan sencillo como parece. Me conformaría con que el estudiante demostrase que $u \in M(\mathbb{R}^n)$, suponiendo que $(u) \subset \{0\}$ implica que $u = c\delta$. Esto puede observarse demostrando que

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \varphi(0) = 0$$
$$\Rightarrow\ \exists\ \varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \varphi_j(x) = 0$$

en $|x| \leq \epsilon_j$ donde $\epsilon_j \downarrow 0$

y $\sup|\varphi_j - \varphi| \to 0$ a medida que $j \to \infty$.

Para probar el caso general será necesario recurrir a algo parecido: dado m, si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ y D_X^α %(0) = 0 para $|\alpha| \leq m$, entonces $\exists\ \varphi_j \in S(\mathbb{R}^n)$; $\varphi_j = 0$ en $|x| \leq \epsilon_j$; $\epsilon_j \downarrow 0$ tal que $\varphi_j \to \varphi$ en la norma C^m.

Problema 4. Si $m \in \mathbb{N}$, $m' > 0$, demuestre que $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ y que $D^\alpha u \in H^{m'}(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$ implica $u \in H^{m+m'}(\mathbb{R}^n)$. ¿Es verdadera la proposición inversa?

Problema 5. Demuestre que cada elemento $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ puede formularse como una suma

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{n} D_j u_j \ , \ u_j \in H^1(\mathbb{R}^n) \ , \ j = 0, \ldots, n \ .$$

Problema 6. Partiendo de que, para $n = 1$, la función localmente integrable (la función Heaviside)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \, . \end{cases}$$

demuestra que $D_x H(x) = c\delta$; ¿cuál es la constante c?

Problema 7. ¿Para qué rango de órdenes m es cierta la expresión:

$$\delta \in H^m(\mathbb{R}^n) \ , \ \delta(\varphi) = \varphi(0)?$$