6. DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

Una primera aproximación válida a las distribuciones se puede encontrar en [2], mientras que en [4] aparecen tratadas de un modo más exhaustivo.

Ya hemos explicado anteriormente la topología métrica completa en $S(\mathbb{R}^n)$. A continuación, trataré de convencerles de que los elementos de su espacio dual $S'(\mathbb{R}^n)$ tienen un número de propiedades de las funciones suficiente para que podamos trabajar con ellas como "funciones generalizadas".

Haga avanzar el texto para acceder a más contenidos

En primer lugar desarrollaremos algunos aspectos relativos a la notación. Una función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ consta de derivadas parciales que hemos denominado $\partial \varphi / \partial x_j :$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Por motivos que quedarán claros más adelante, incluimos en la definición una $\sqrt{-1}$ y escribimos

$$(6.1) \qquad D_j\varphi = \frac{1}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,.$$

Decimos que φ es continuamente diferenciable cuando cada $D_j\varphi$ es continua. A continuación definimos inductivamente la diferenciabilidad continua un número de veces k diciendo que φ y $D_j\varphi$ son continuamente diferenciables (k – 1) veces, lo que para $k = 2$ significa que

$D_jD_k\varphi$ son continuas para $j, k = 1, \ldots, n$.

Recordemos ahora que, cuando son continuas, estas segundas derivadas son simétricas:

$$(6.2) \qquad D_jD_k\varphi = D_kD_j\varphi\,.$$

Lo cual quiere decir que podemos emplear una notación compacta para derivadas mayores. Tomemos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$; llamaremos "multi-índice" a un elemento $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y, si φ es continuamente diferenciable k veces como mínimo, definimos[12]

$$(6.3) \quad D^\alpha\varphi = \frac{1}{i^{|\alpha|}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}\varphi$$

siempre que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq k$.

El próximo paso consiste en *definir* los espacios.

$$(6.4) \qquad \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ D^\alpha\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| \leq k\right\}\,.$$

Debemos fijarnos en que la convención establece que se afirma que $D^\alpha\varphi$ existe cuando se requiere que sea continua. Aplicando $\langle x\rangle = (1 + |x|^2)$ definimos

[12] Periódicamente es posible que se produzca confusión entre los dos significados de $|\alpha|$, aunque no es frecuente.

$$(6.5) \qquad \langle x\rangle^{-k}\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,;\ \langle x\rangle^k\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\right\}\ ,$$

con lo que nuestro espacio de funciones test es

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_k \langle x\rangle^{-k}\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\,.$$

Consecuentemente,

$$(6.6) \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow D^\alpha(\langle x\rangle^k\varphi) \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| \le k$$ y todo k.

Lema 6.1. *La condición* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *puede expresarse*

$$\langle x\rangle^k D^\alpha\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| \le k\,,\ \forall\ k\,.$$

Prueba. Comenzamos por comprobar que

$$\begin{aligned} &\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ D_j(\langle x\rangle\varphi) \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ j = 1,\cdots,n \\ \Leftrightarrow\ &\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ \langle x\rangle D_j\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ j = 1,\cdots,n\,. \end{aligned}$$

Dado que

$$D_j\langle x\rangle\varphi = \langle x\rangle D_j\varphi + (D_j\langle x\rangle)\varphi$$

y que

$$D_j\langle x\rangle = \tfrac{1}{i}x_j\langle x\rangle^{-1}$$

es una función acotada continua, la cuestión queda clara. Considerémosla ahora para un valor mayor de k.

$$\begin{aligned} (6.7) \qquad &D^\alpha\langle x\rangle^p\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| = p\,,\ 0 \le p \le k \\ \Leftrightarrow\ &\langle x\rangle^p D^\alpha\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| = p\,,\ 0 \le p \le k\,. \end{aligned}$$

Dejaré que comprueben esto en el Problema 6.1.

Corolario 6.2. *Para cualquier* $k \in \mathbb{N}$, *las normas*

$$\|\langle x\rangle^k\varphi\|_{\mathcal{C}^k}\ \text{y} \qquad \sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ |\beta|\le k}} \|x^\alpha D_x^\beta\varphi\|_\infty$$

son equivalentes.

Prueba. Toda prueba razonable de (6.2) debe demostrar que las normas

$$\|\langle x\rangle^k \varphi\|_{C^k} \text{ y } \quad \sum_{|\beta|\leq k} \|\langle x\rangle^k D^\beta \varphi\|_\infty$$

son equivalentes. Al existir constantes positivas tal que

$$C_1\left(1+\sum_{|\alpha|\leq k}|x^\alpha|\right) \leq \langle x\rangle^k \leq C_2\left(1+\sum_{|\alpha|\leq k}|x^\alpha|\right)$$

las normas se cumplen.

Proposición 6.3. *Un funcional lineal $u : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ es continuo si, y solamente si, existe C, k tal que*

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq k,\\ |\beta|\leq k}} \sup_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D_x^\beta \varphi\right| .$$

Prueba. Esta es solamente la equivalencia de las normas, puesto que ya demostramos que $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ si, y solamente si,

$$|u(\varphi)| \leq C\|\langle x\rangle^k \varphi\|_{C^k}$$

para algunos valores de *k.*

Lema 6.4. *Una* correlación *lineal*

$$T : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

es continua si, y solamente si, para cada k existen C y j de tal modo que si $|\alpha| \leq$ *y* $|\beta| \leq k$

$$(6.8) \qquad \sup\left|x^\alpha D^\beta T\varphi\right| \leq C \sum_{|\alpha'|\leq j,\ |\beta'|\leq j} \sup_{\mathbb{R}^n}\left|x^{\alpha'} D^{\beta'} \varphi\right| \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Prueba. Este es el Problema 6.2.

Toda esta complicación sobre normas demuestra que

$$x_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ y } D_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

son continuas.

Ahora ya tenemos cierta idea del significado de $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Fijémonos en que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ implica

$$(6.9) \qquad x_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \forall\ j = 1, \cdots, n$$

$$(6.10) \qquad D_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \forall\ j = 1, \cdots, n$$

$$(6.11) \qquad \varphi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

donde tenemos que definir estos elementos de forma razonable. Hay que recordar que "se supone" que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es como una integral aplicada a una "función generalizada".

$$(6.12) \qquad u(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\psi(x)\,dx \ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dado que esto sería cierto si *u fuera* una función *definiremos*

$$(6.13) \qquad x_j u(\psi) = u(x_j\psi) \ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

A continuación, verificamos que $x_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} |x_j u(\psi)| &= |u(x_j\psi)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\leq k,\ |\beta|\leq k} \sup_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta(x_j\psi)\right| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha|\leq k+1,\ |\beta|\leq k} \sup_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta\psi\right| . \end{aligned}$$

De modo similar podemos definir las derivadas parciales mediante la fórmula estándar de integración por partes.

$$(6.14) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (D_j u)(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)(D_j\varphi(x))\,dx$$

cuando $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *definiremos* de nuevo

$$D_j u(\psi) = -u(D_j\psi) \ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De esta manera queda claro que $D_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Iterando estas definiciones hallamos que, para cualquier multi-índice α, D^α define una correlación lineal

$$D^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,. \tag{6.15}$$

Por lo general, un operador diferencial lineal con coeficientes constantes es una suma de estos "monomios". Así, por ejemplo, el operador de Laplace es

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2\,.$$

Lo que a nosotros nos interesa es tratar de resolver ecuaciones diferenciales tales como

$$\Delta u = f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

También podemos multiplicar $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ por $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, definiendo simplemente

$$\varphi u(\psi) = u(\varphi\psi)\ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{6.16}$$

Para que esto tenga sentido basta con comprobar que

$$\sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ |\beta|\le k}} \sup_{\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta(\varphi\psi)\right| \le C \sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ |\beta|\le k}} \sup_{\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \psi\right|\,. \tag{6.17}$$

Lo cual se desprende fácilmente de la fórmula de Leibniz.

Para comenzar a considerar $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ como una función generalizada debemos definir en primer lugar su *soporte* (supp). Recordemos que

$$\operatorname{supp}(\psi) = \operatorname{cerr}\{x \in \mathbb{R}^n; \psi(x) \neq 0\}\,. \tag{6.18}$$

Podemos formular esto de otra forma "débil" que resulta más sencilla de generalizar:

$$p \notin \operatorname{supp}(u) \Leftrightarrow\ \exists \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\, \varphi(p) \neq 0\,,\, \varphi u = 0\,. \tag{6.19}$$

De hecho, esta definición es válida para *cualquier* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Lema 6.5. *El conjunto* supp(u) *definido mediante* (6.19) *es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *y se reduce a* (6.18) *cuando* $u \in S(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. El conjunto definido mediante (6.19) es cerrado, ya que

$$\operatorname{supp}(u)^{\complement} = \{p \in \mathbb{R}^n;\ \exists\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \varphi(p) \neq 0,\ \varphi u = 0\} \tag{6.20}$$

es claramente abierto: la misma φ funciona para puntos próximos. Si $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, definiremos $u_\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$, que de nuevo identificaremos con ψ mediante

$$(6.21) \qquad u_\psi(\varphi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,dx\,.$$

Resulta obvio que $u_\psi = 0 \Longrightarrow \psi = 0$, simplemente fijamos $\varphi = \psi$ en (6.21). Por lo que la correlación

$$(6.22) \qquad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \psi \longmapsto u_\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

es inyectiva. Queremos probar que

$$(6.23) \qquad \operatorname{supp}(u_\psi) = \operatorname{supp}(\psi)$$

dada por (6.19) en el lado izquierdo y por (6.18) en el derecho. Comenzamos por demostrar que

$$\operatorname{supp}(u_\psi) \subset \operatorname{supp}(\psi).$$

Para lo que deberemos comprobar que

$$p \notin \operatorname{supp}(\psi) \ \Rightarrow \ p \notin \operatorname{supp}(u_\psi).$$

La primera condición es que $\psi(x) = 0$ en un vecindario, U de p, luego existe una función C^∞ con soporte en U y $\varphi(p) \neq 0$. Por tanto, $\varphi\psi \equiv 0$. Supongamos, a la inversa, $p \notin \operatorname{supp}(u_\psi)$. Existirá entonces $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(p) \neq 0$ y $\varphi u_\psi = 0$; es decir:

$$\varphi u_\psi(\eta) = 0 \ \forall\ \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Esto quiere decir, por la inyectividad de $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$, que $\varphi\psi = 0$, por lo que $\psi \equiv 0$ en un vecindario de p y $p \notin \operatorname{supp}(\psi)$.

Consideremos los ejemplos más simples de distribución que no sean funciones; concretamente, aquellos con soporte en un punto p dado. El más obvio es la "función" delta de Dirac.

$$(6.24) \qquad \delta_p(\varphi) = \varphi(p) \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Podemos obtener muchos más, ya que D^α es *local*

$$(6.25) \qquad \operatorname{supp}(D^\alpha u) \subset \operatorname{supp}(u) \ \forall\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

De hecho,

$$p \notin \operatorname{supp}(u) \Rightarrow \exists\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \varphi u \equiv 0,\ \varphi(p) \neq 0.$$

Por consiguiente, el soporte de cada una de las distribuciones $D^\alpha \delta_p$ se halla contenido en $\{p\}$. Ninguna de ellas se anula y todas son linealmente independientes.