

7. CONVOLUCION Y DENSIDAD

Hemos definido una relación de inclusión

(7.1)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \longmapsto u_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad u_\varphi(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x) dx \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Esta relación nos permite "pensar en" $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como un sub-espacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; lo que indica que normalmente identificaremos u_φ con φ . Podemos hacerlo porque sabemos que (7.1)

Haga avanzar el texto para acceder a más contenidos

es inyectiva. Podemos extender la relación (7.1) para incluir espacios más amplios

$$(7.2) \quad \begin{aligned} C_0^0(\mathbb{R}^n) \ni \varphi &\longmapsto u_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ L^p(\mathbb{R}^n) \ni \varphi &\longmapsto u_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ M(\mathbb{R}^n) \ni \mu &\longmapsto u_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ u_\mu(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu, \end{aligned}$$

pero necesitamos saber que estas relaciones son inyectivas antes de pasar a otras cosas.

Podemos comprobarlo mediante *convolución*, que es una especie de "producto" de funciones. Para comenzar, supongamos $v \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definiremos una nueva función "promediando v con respecto a ψ ":

$$(7.3) \quad v * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)\psi(y) dy.$$

La integral converge mediante convergencia dominada: $\psi(y)$ es integrable y v acotada,

$$|v(x-y)\psi(y)| \leq \|v\|_{C_0^0} |\psi(y)|.$$

Podemos aplicar el mismo tipo de cálculo para mostrar que $v * \psi$ es continua.

Fijando $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(7.4) \quad \begin{aligned} v * \psi(x+x') - v * \psi(x) \\ = \int (v(x+x'-y) - v(x-y))\psi(y) dy. \end{aligned}$$

Para comprobar que esta función es pequeña para un valor pequeño de x' , dividiremos la integral en dos partes. Dado que el valor de ψ es muy pequeño cuando es próxima a infinito, dado $\epsilon > 0$ podemos escoger un valor tan alto de R que

$$(7.5) \quad \|v\|_\infty \cdot \int_{|y| \geq R} |\psi(y)| dy \leq \epsilon/4.$$

El conjunto $|y| \leq R$ es compacto, y si $|x| \leq R'$, $|x'| \leq 1$, entonces $|x+x'-y| \leq R+R'+1$. Una función continua es *uniformemente continua* en cualquier conjunto compacto, luego podemos elegir $\delta > 0$ tal que

$$(7.6) \quad \sup_{\substack{|x'| < \delta \\ |y| \leq R}} |v(x+x'-y) - v(x-y)| \cdot \int_{|y| \leq R} |\psi(y)| dy < \epsilon/2.$$

Combinando (7.5) y (7.6) queda demostrado que $\nu * \psi$ es continua. Por último, llegamos a la conclusión

$$(7.7) \quad \nu \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \nu * \psi \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Para ello deberemos mostrar que $\nu * \psi$ es pequeña en infinito, lo que se deriva del hecho de que ν lo es. Dado $\varepsilon > 0$, existirá $R > 0$ tal que $|\nu y| \leq \varepsilon$ si $|y| \geq R$. Dividiendo en dos la integral que define la convolución

$$\begin{aligned} |v * \psi(x)| &\leq \int_{|y|>R} u(y)\psi(x-y)dy + \int_{|y|<R} |u(y)\psi(x-y)|dy \\ &\leq \varepsilon/2 \|\psi\|_\infty + \|u\|_\infty \sup_{B(x,R)} |\psi|. \end{aligned}$$

Dado que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la última constante tenderá a 0 a medida que $|x| \rightarrow \infty$.

Pero podemos buscar una opción mucho mejor. Suponiendo $|x'| \leq 1$ podemos utilizar la fórmula de Taylor con resto y escribir

$$(7.8) \quad \psi(z + x') - \psi(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \psi(z + tx') dt = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \tilde{\psi}_j(z, x').$$

En el Problema se pide verificar que

$$(7.9) \quad \psi_j(z; x') \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ depende continuamente de } x' \text{ en } |x'| \leq 1.$$

Volviendo a (7.3) podemos utilizar la invariancia de reflexión y traslación sobre la medida de Lebesgue para reescribir la integral (cambiando la variable) como

$$(7.10) \quad \nu * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(y)\psi(x-y) dy.$$

Lo que cambia el sentido del papel de ν y ψ y demuestra que si tanto ν como ψ se hallan en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\nu * \psi = \psi * \nu$.

Utilizando esta fórmula en (7.4) tenemos

$$\begin{aligned} (7.11) \quad \nu * \psi(x + x') - \nu * \psi(x) &= \int \nu(y)(\psi(x + x' - y) - \psi(x - y)) dy \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \int_{\mathbb{R}^n} \nu(y) \tilde{\psi}_j(x - y, x') dy = \sum_{j=1}^n x_j (\nu * \psi_j(\cdot; x'))(x). \end{aligned}$$

A partir de (7.9) y de lo que ya hemos demostrado, $v * \psi(\cdot; x')$ es continua en ambas variables, y se halla en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en la primera. Por consiguiente,

$$(7.12) \quad v \in C_0^0(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow v * \psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Asimismo vemos que

$$(7.13) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} v * \psi = v * \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

Por tanto, la regularidad de $v * \psi$ proviene de ψ .

Proposición 7.1. Si $v \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(7.14) \quad v * \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\mathbb{R}^n).$$

Prueba. Se obtiene de (7.12), (7.13) y de la inducción.

Tomemos ahora una elección más particular de ψ . Hemos demostrado ya la existencia de

$$(7.15) \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 0, \text{supp}(\varphi) \subset \{|x| \leq 1\}.$$

Y podemos también suponer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = 1,$$

multiplicando por una constante positiva. Consideremos ahora

$$(7.16) \quad \varphi_t(x) = t^{-n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \quad 1 \geq t > 0.$$

Tiene las mismas propiedades, excepto que

$$(7.17) \quad \text{supp} \varphi_t \subset \{|x| \leq t\}, \quad \int \varphi_t \, dx = 1.$$

Proposición 7.2. Si $v \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ entonces a medida que $t \rightarrow 0$, $v_t = v * \varphi_t \rightarrow v$ en $C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Aplicando (7.17) podemos escribir la diferencia como

$$(7.18) \quad |v_t(x) - v(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (v(x-y) - v(x)) \varphi_t(y) \, dy \right| \\ \leq \sup_{|y| \leq t} |v(x-y) - v(x)| \rightarrow 0.$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que φ_t tiene (supp) en $|y| \leq t$ y su integral es 1. Por tanto, $v_t \rightarrow v$ uniformemente en cualquier conjunto en el que v sea uniformemente continua, es decir, \mathbb{R}^n .

Corolario 7.3. $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ es denso en C_0^p para cualquier $k \geq p$.

Proposición 7.4. $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $k \geq p$.

Prueba. Tomemos primero $k = 0$. El sub-espacio $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C_0^0(\mathbb{R}^n)$, cortando por fuera una bola grande. Si $v \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en $\{|x| \leq R\}$, entonces

$$v * \varphi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$$

tendrá soporte en $\{|x| \leq R + 1\}$. Dado que $v * \varphi_t \rightarrow v$ el resultado se desprende para $k = 0$.

El mismo argumento sirve para $k > 1$, ya que $D^\alpha(v * \varphi_t) = (D^\alpha v) * \varphi_t$.

Corolario 7.5. La relación de las medidas finitas de Radon

$$(7.19) \quad M_{fin}(\mathbb{R}^n) \ni \mu \longmapsto u_\mu \in S'(\mathbb{R}^n)$$

es inyectiva.

A continuación buscamos el mismo resultado para $L^2(\mathbb{R}^n)$ (y puede que para $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$). Dejo que ustedes resuelvan la parte teórica del argumento relativa a la medida.

Proposición 7.6. Los elementos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ son "continuos en la media"; es decir,

$$(7.20) \quad \lim_{|t| \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+t) - u(x)|^2 dx = 0.$$

Este es el Problema 71.

Aplicando esta proposición concluimos que

$$(7.21) \quad S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \text{ es denso}$$

al igual que antes. Veamos en primer lugar que el espacio de L^2 funciones de soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} |u(x)|^2 dx = 0 \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Volvamos a continuación a la discusión de $v * \varphi$, sustituyendo ahora v por $u \in L_c^2(\mathbb{R}^n)$.

La compactidad del soporte significa que $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, luego en

$$(7.22) \quad u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\varphi(y)dy$$

la integral es absolutamente convergente. Además

$$(7.22) \quad u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\varphi(y)dy$$

cuando $\{|x| \leq R\}$ es lo suficientemente grande. Por consiguiente $u * \varphi$ es continua y el mismo argumento de antes demuestra que

$$u * \varphi_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

A continuación, para ver que $u * \varphi_t \rightarrow u$, suponiendo que u tiene (o no) soporte compacto calculamos la integral

$$\begin{aligned} |u * \varphi_t(x) - u(x)| &= \left| \int (u(x-y) - u(x)) \varphi_t(y) dy \right| \\ &\leq \int |u(x-y) - u(x)| \varphi_t(y) dy. \end{aligned}$$

Y, aplicando dos veces el mismo argumento,

$$\begin{aligned} &\int |u * \varphi_t(x) - u(x)|^2 dx \\ &\leq \iiint |u(x-y) - u(x)| \varphi_t(y) |u(x-y') - u(x)| \varphi_t(y') dx dy dy' \\ &\leq \left(\int |u(x-y) - u(x)|^2 \varphi_t(y) \varphi_t(y') dx dy dy' \right) \\ &\leq \sup_{|y| \leq t} \int |u(x-y) - u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Obsérvese que en el segundo paso he utilizado la desigualdad de Schwarz con el integrando escrito como el producto

$$|u(x-y) - u(x)| \varphi_t^{1/2}(y) \varphi_t^{1/2}(y') \cdot |u(x-y') - u(x)| \varphi_t^{1/2}(y) \varphi_t^{1/2}(y').$$

Por lo que sabemos que

$$L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ es inyectiva.}$$

Lo que significa que todos nuestros espacios habituales de funciones se encuentran dentro de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Por último, podemos utilizar la convolución con φ_t para demostrar la existencia de particiones *uniformes* de unidad. Si $K \Subset U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto en un conjunto abierto, entonces quedará demostrada la existencia de $\xi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, con $\xi = 1$ en algún vecindario de K y $\text{soporte}(\xi) \Subset U$.

Consideremos ahora $\xi * \varphi_t$ para un valor pequeño t . De hecho,

$$\text{supp}(\xi * \varphi_t) \subset \{p \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(p, \text{supp } \xi) \leq 2t\}$$

y, de modo similar, $0 \leq \xi * \varphi_t \leq 1$ y

$$\xi * \varphi_t = 1 \text{ en } p \text{ si } \xi = 1 \text{ en } B(p, 2t).$$

Aplicando lo cual obtenemos:

Proposición 7.7. Si $U_a \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos para $a \in A$ y $K \Subset \bigcup_{a \in A} U_a$ luego existen finitamente muchas $\varphi_i \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, con $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_{a_i}$ tal que $\sum_i \varphi_i = 1$ en un vecindario de K .

Prueba. Por la compacticidad de K podemos escoger una subcobertura abierta finita.

Aplicando el Lema 1.8 podemos escoger una partición continua, ϑ'_i , de unidad subordinada a esta cobertura. Utilizando el argumento de la convolución visto más arriba podemos sustituir ϑ'_i por $\vartheta'_i * \varphi_t$ para $t > 0$. Si es lo suficientemente pequeña, tenemos otra vez una partición de unidad subordinada a la cobertura, aunque esta vez será una partición uniforme.

A continuación podemos emplear un sencillo "argumento de corte" para mostrar

Lema 7.8. El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de C^∞ funciones de soporte compacto es denso en $S(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Escogemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(x) = 1$ en $|x| \leq 1$. Entonces, dado $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ tendremos en cuenta la secuencia

$$\psi_n(x) = \varphi(x/n)\psi(x).$$

Obviamente, $\psi_n = \psi$ en $|x| \leq n$, de modo que si converge en $S(\mathbb{R}^n)$ deberá converger hacia ψ . Suponiendo que $m \geq n$; entonces, por la fórmula de Leibniz¹³

$$\begin{aligned} D_x^\alpha(\psi_n(x) - \psi_m(x)) &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - \varphi\left(\frac{x}{m}\right) \right) \cdot D_x^{\alpha-\beta} \psi(x). \end{aligned}$$

Todas las derivadas de $\varphi(x/n)$ son acotadas, independientes de n y $\psi_n = \psi_m$ en $|x| \leq n$ luego para cualquier p

$$|D_x^\alpha(\psi_n(x) - \psi_m(x))| \leq \begin{cases} 0 & |x| \leq n \\ C_{\alpha,p} \langle x \rangle^{-2p} & |x| \geq n \end{cases}.$$

Por consiguiente, ψ_n es Cauchy en $S(\mathbb{R}^n)$.

De donde se deduce que cada elemento de $S'(\mathbb{R}^n)$ se halla determinado por su restricción a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ya hemos definido más arriba el soporte de una distribución temperada como

¹³ Problema 25.

$$(7.23) \quad \text{supp}(u) = \{x \in \mathbb{R}^n; \exists \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \varphi(x) \neq 0, \varphi u = 0\}^c.$$

Aplicando el lema anterior y la construcción de particiones uniformes de la unidad obtenemos

Proposición 7.9. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\text{supp}(u) = \emptyset$; entonces $u = 0$.

Prueba. Partiendo de (7.23), si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp}(\psi u) \subset \text{supp}(u)$. Si $x \notin \text{supp}(u)$ entonces, por definición, $\varphi u = 0$ para algún $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(x) \neq 0$. Por lo tanto, $\varphi \neq 0$ en $B(x, \varepsilon)$ para un valor $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en $B(x, \varepsilon)$, entonces $\psi u = \hat{\psi} \varphi u = 0$, donde $\hat{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{\psi} = \begin{cases} \psi/\varphi & \text{en } B(x, \varepsilon) \\ 0 & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

Por tanto, dado $K \Subset \mathbb{R}^n$ podemos obtener $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, con soporte en estas bolas, de modo que $\sum_j \varphi_j \equiv 1$ en K aunque $\varphi_j u = 0$. Para $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dado, aplicamos lo anterior a $\text{supp}(\mu)$. Por tanto,

$$\mu = \sum_j \varphi_j \mu \Rightarrow u(\mu) = \sum_j (\varphi_j u)(\mu) = 0.$$

De forma que $u = 0$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego $u = 0$.

El espacio lineal de distribuciones de soporte compacto vendrá indicado $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, lo que a menudo se expresa como $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora una caracterización de la "función delta"

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

o al menos el espacio unidimensional de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ que abarca. Nos basamos para ello en la observación de que $(x_j \varphi)(0) = 0$ cuando $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 7.10. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cumple $x_j u = 0, j = 1, \dots, n$; entonces $u = c \delta$.

Prueba. Se trata sobre todo de caracterizar el espacio nulo de δ como funcional lineal, demostrando que

$$(7.24) \quad \mathcal{H} = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \varphi(0) = 0\}$$

puede también expresarse como

$$(7.25) \quad \mathcal{H} = \left\{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \varphi = \sum_{j=1}^n x_j \psi_j, \varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Es obvio que la parte derecha de (7.25) se halla contenida en la parte izquierda. Para ver la inversa, primero supondremos que

$$(7.26) \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \varphi = 0 \text{ en } |x| < 1.$$

Y, a continuación, definiremos

$$\psi = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \varphi/|x|^2 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Todas las derivadas de $1/|x|^2$ son acotadas en $|x| > 1$, por lo que, a partir de la fórmula de Leibniz, se desprende que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dado que

$$\varphi = \sum_j x_j (x_j \psi)$$

esto nos demuestra que φ de la forma (7.26) se encuentra en la parte derecha de (7.25). En general, suponemos que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$(7.27) \quad \begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(tx) dt \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(tx) dt. \end{aligned}$$

No cabe duda de que estas integrales son C^∞ , aunque puede que no decrezcan rápidamente al aproximarse a infinito. Sin embargo, podemos elegir $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\mu = 1$ en $|x| \leq 1$. Entonces (7.27), cuando $\varphi(0) = 0$, se convierte en

$$\begin{aligned} \varphi &= \mu \varphi + (1 - \mu) \varphi \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \psi_j + (1 - \mu) \varphi, \psi_j = \mu \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(tx) dt \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Como $(1 - \mu) \varphi$ es de la forma (7.26), queda probado (7.25). Hemos supuesto, acerca de u , que $x_j u = 0$, luego

$$u(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

a partir de (7.25). Eligiendo μ al igual que hemos hecho más arriba, podemos expresar, de forma general, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\varphi = \varphi(0) \cdot \mu + \varphi', \quad \varphi' \in \mathcal{H}.$$

Por consiguiente,

$$u(\varphi) = \varphi(0)u(\mu) \Rightarrow u = c\delta, \quad c = u(\mu).$$

Se trata de un resultado bastante convincente, como veremos enseguida. La transformada de Fourier de un elemento $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es¹⁴

$$(7.28) \quad \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La integral converge, puesto que $|\varphi| \leq C \langle x \rangle^{-n-1}$. En realidad, de esta convergencia se deriva obviamente la continuidad de $\hat{\varphi}$, dado que

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi')| &\in \int |e^{ix \cdot \xi} - e^{ix \cdot \xi'}| |\varphi| dx \\ &\rightarrow 0 \text{ a medida que } \xi' \rightarrow \xi. \end{aligned}$$

Proposition 7.11. *La transformación de Fourier, (7.28), define una correlación lineal continua*

$$(7.29) \quad \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi}.$$

Prueba. Diferenciando por el signo de la integral¹⁵ se demuestra que

$$\partial_{\xi_j} \hat{\varphi}(\xi) = -i \int e^{-ix \cdot \xi} x_j \varphi(x) dx.$$

Dado que la integral del lado derecho es absolutamente convergente, queda probado que (recordemos las *is*)

$$(7.30) \quad D_{\xi_j} \hat{\varphi} = -\widehat{x_j \varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Del mismo modo, si multiplicamos por ξ_j y nos tenemos en cuenta que

$$\xi_j e^{-ix \cdot \xi} = i \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix \cdot \xi}$$

la integración por partes muestra

¹⁴ Las normalizaciones pueden variar, aunque tal variación no tiene demasiada importancia.

¹⁵ Véase [5]

$$\begin{aligned}
(7.31) \quad \xi_j \hat{\varphi} &= i \int \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix \cdot \xi} \right) \varphi(x) dx \\
&= -i \int e^{-ix \cdot \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\
\widehat{D_j \varphi} &= \xi_j \hat{\varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Como $x_j \varphi, D_j \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, estos resultados se pueden iterar, probando que

$$(7.32) \quad \xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi} = \mathcal{F} \left((-1)^{|\beta|} D_x^\alpha x^\beta \varphi \right).$$

Por consiguiente,

$$\left| \xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi} \right| \leq C_{\alpha\beta} \sup | \langle x \rangle^{+n+1} D_x^\alpha x^\beta \varphi | \leq C \| \langle x \rangle^{n+1+|\beta|} \varphi \|_{C^{|\alpha|}},$$

lo que a su vez demuestra la continuidad de \mathcal{F} como correlación (7.32).

Supongamos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dado que $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podremos considerar la distribución $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$(7.33) \quad u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

La continuidad de u se deriva del hecho de que la integración sea continua y de (7.29). Fijémonos ahora en que

$$\begin{aligned}
u(x_j \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{x_j \varphi}(\xi) d\xi \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} D_{\xi_j} \hat{\varphi} d\xi = 0
\end{aligned}$$

donde aplicamos (7.30). Aplicando la Proposition 7.10 concluimos que $u = c\delta$ para alguna constante (universal) c . Esto significa, por definición

$$(7.34) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = c\varphi(0).$$

Entonces, ¿cuál es la constante? Para averiguarlo, deberemos recurrir a un ejemplo. El más sencillo es

$$\varphi = \exp(-|x|^2/2).$$

Lema 7.12. La transformada de Fourier de la gaussiana $\exp(-|x|^2/2)$ es la gaussiana:

$$(2\pi)^{n/2} \exp(-|\xi|^2/2).$$

Prueba. Existen dos métodos muy claros: uno utiliza el análisis complejo (teorema de Cauchy) y el otro, que es el que seguiremos, parte de la unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Fijémonos, en primer lugar, en que

$$\exp(-|x|^2/2) = \prod_j \exp(-x_j^2/2).$$

Por lo que¹⁶

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}(\xi_j), \quad \psi(x) = e^{-x^2/2},$$

que es una función de una variable. Vemos a continuación que ψ satisface la ecuación diferencial

$$(\partial_x + x)\psi = 0,$$

y que constituye la *única* solución a la misma hasta un múltiplo constante. Por (7.30) y (7.31) su transformada de Fourier cumple

$$\widehat{\partial_x \psi} + x\widehat{\psi} = i\xi\hat{\psi} + i\frac{d}{d\xi}\hat{\varphi} = 0.$$

Se trata de la misma ecuación, aunque tomando la variable ξ . Por tanto, $\hat{\psi} = ce^{-|\xi|^2/2}$. Necesitamos de nuevo hallar la constante. Sin embargo,

$$\hat{\psi}(0) = c = \int e^{-x^2/2} dx = (2\pi)^{1/2}$$

por el uso estándar de las coordenadas polares:

$$c^2 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi.$$

De esta forma, queda demostrado el lema.

En definitiva, hemos demostrado que para cualquier $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(7.35) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^n \varphi(0).$$

Ya que esto es cierto para $\varphi = \exp(-|x|^2/2)$. La identidad nos permite *invertir* la transformada de Fourier.

¹⁶ En realidad, mediante el teorema de Fubini, aunque en este caso se pueden utilizar las integrales de Riemann.