## Números complejos

- Los números complejos tienen componentes reales e imaginarios. Un número complejo $\underline{r}$ puede estar expresado en forma polar o forma cartesiana:

$$
\begin{aligned}
\underline{r} &= a + jb \text{ (cartesiana)} \\
&= |r|e^{\phi} \text{ (polar)}
\end{aligned}
$$

Las relaciones siguientes sirven para convertir de las formas cartesianas a las polares:

$$
\begin{aligned}
\text{Magnitud } |r| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
\text{Ángulo } \phi &= \begin{cases} \tan^{-1}\frac{b}{a} & a > 0 \\ \tan^{-1}\frac{b}{a} \pm \pi & a < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Los números complejos se pueden trazar en el plano complejo tanto en forma polar como en forma cartesiana. Figura 1.

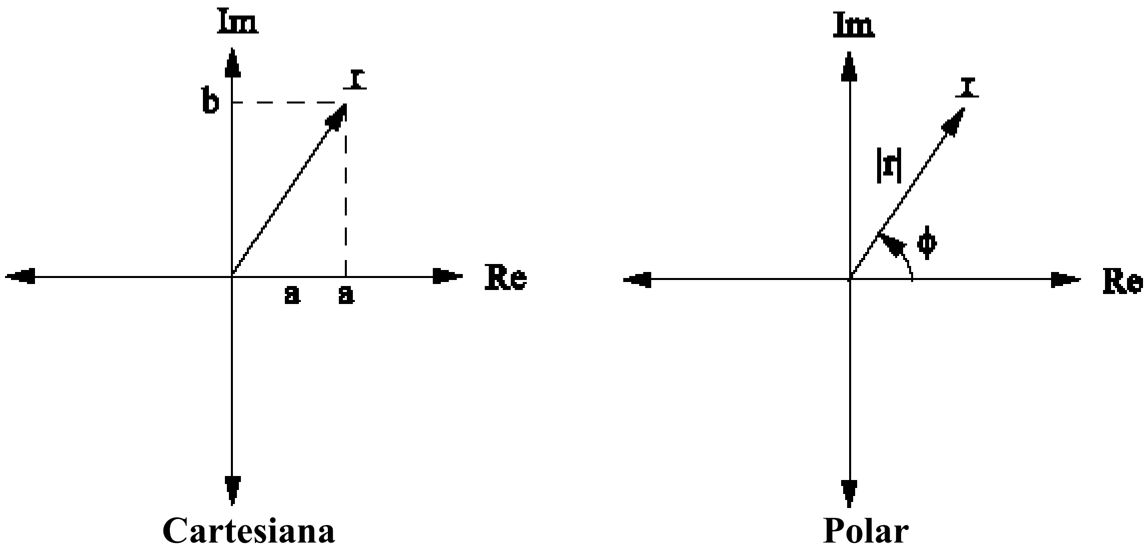


Figura 1. Diagramas de plano complejo: formas polares y cartesianas.

## Identidad de Euler

La identidad de Euler estipula que:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

Esto se puede mostrar tomando la expansión en serie de *sin*, *cos* y *e*.

$$\begin{aligned}
\cos\phi &= \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \ldots \\
\sin\phi &= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \ldots \\
e^{j\phi} &= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + j\frac{\phi^5}{5!} + \ldots
\end{aligned}$$

Combinando:

$$\begin{aligned}
\cos\phi + j\sin\phi &= 1 + j\phi - \frac{(\phi)^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + j\frac{\phi^5}{5!} + \ldots \\
&= e^{j\phi}
\end{aligned}$$

## Exponenciales complejos

- Considere el caso en el que $\phi$ llega a ser una función temporal que aumenta a una velocidad constante $\omega$:

$$\phi(t) = \omega t.$$

entonces, $\underline{r}(t)$ se transforma en:

$$\underline{r}(t) = e^{j\omega t}$$

El trazado de $\underline{r}(t)$ en el plano complejo dibuja un círculo con un radio constante = 1 (Fig. 2). Si trazamos los componentes reales e imaginarios de $\underline{r}(t)$ frente al tiempo (Fig. 3), observamos que el componente real es $Re\{\underline{r}(t)g\}$ = cos $\omega t$, mientras que el componente imaginario es Im$\{\underline{r}(t)g\}$= sin $\omega t$.

- Considere la variable $\underline{r}(t)$ que se define de la forma siguiente:

$$\underline{r}(t) = e^{\underline{s}t}$$

donde $\underline{s}$ es un número complejo:

$$\underline{s} = \sigma + j\omega$$

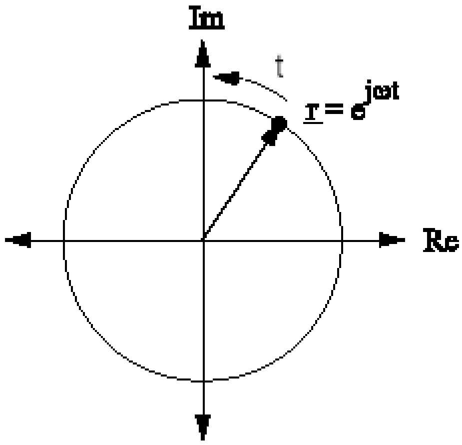


Figura 2. Diagramas de plano complejo: $\underline{r}(t) = e^{j\omega t}$

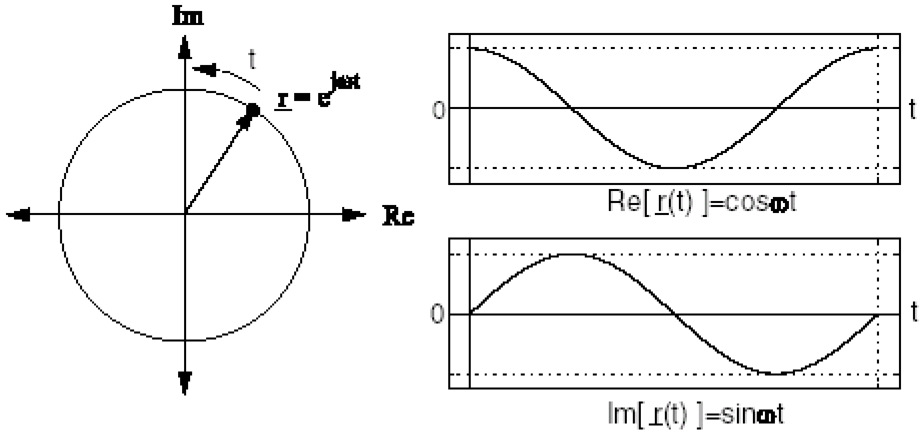


Figura 3. Componentes reales e imaginarios de $\underline{r}(t)$ frente al tiempo.

- ¿Qué trayectoria dibuja $\underline{r}(t)$ en el plano complejo? Considere:

$$\underline{r}(t) = e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

Se puede ver esto como una magnitud variable en el tiempo ($e^{\sigma t}$) que multiplica un punto rotatorio en el círculo unitario a una frecuencia $\omega$ por la función $e^{j\omega t}$. El trazado de único de la magnitud de $e^{j\omega t}$ frente al tiempo, muestra que existen tres regiones distintas (Fig. 4 ):

1. $\sigma > 0$: donde la magnitud crece sin límites. Esta condición es inestable.

2. $\sigma = 0$: donde la magnitud permanece constante. Esta condición se denomina marginalmente estable, ya que la magnitud no crece sin límite pero no converge a cero.

3. $\sigma < 0$: donde la magnitud converge a cero. Esta condición se califica de estable, ya que la respuesta del sistema llega a cero mientras $t \rightarrow \infty$.

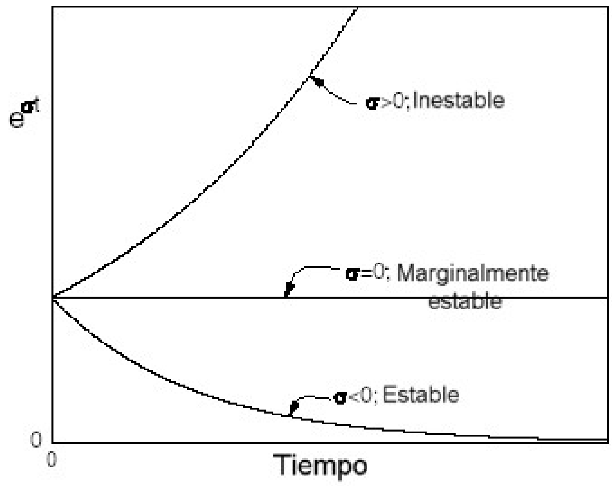


Figura 4. Magnitud $\underline{r}(t)$ para distintos $\sigma$.

## Efecto de la posición del polo

La estabilidad de un sistema viene determinada por la ubicación de los polos de dicho sistema. Si un polo se encuentra ubicado en el 2º o 3er cuadrante (el cuadrante de ubicación determina la dirección de rotación en el diagrama polar), se dice que el polo es estable. En la Figura 5 se muestra la posición del polo en el plano complejo, la trayectoria de $\underline{r}(t)$ en el plano complejo y el componente real de la respuesta en tiempo para un polo estable.
Si el polo está ubicado directamente en el eje imaginario, se dice que es marginalmente estable. En la Figura 6 se muestra la posición del polo en el plano complejo, la trayectoria de $\underline{r}(t)$ en el plano complejo y el componente real de la respuesta en tiempo para un polo marginalmente estable.
Por último, si un polo se ubica bien en el 1er o en el 4º cuadrante, se dice que es inestable. En la Figura 7 se muestra la posición del polo en el plano complejo, la trayectoria de $\underline{r}(t)$ en el plano complejo y el componente real de la respuesta en tiempo para un polo inestable.

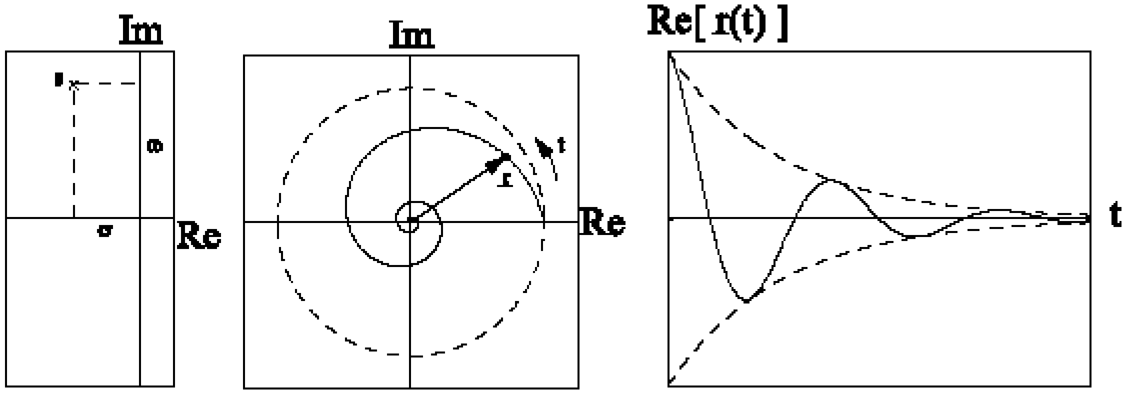


Figura 5. Posición del polo, $\underline{r}(t)$, y respuesta en tiempo real para un polo estable.

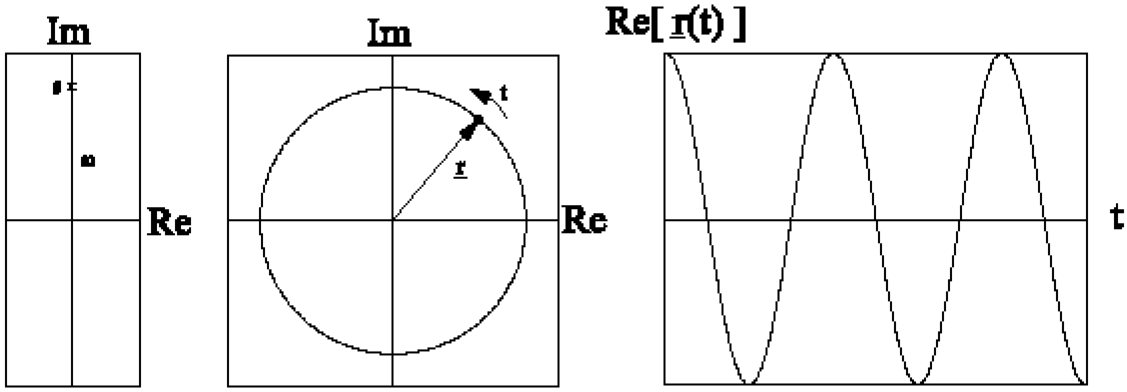


Figura 6. Posición del polo, $\underline{r}(t)$, y respuesta en tiempo real para un polo marginalmente estable.

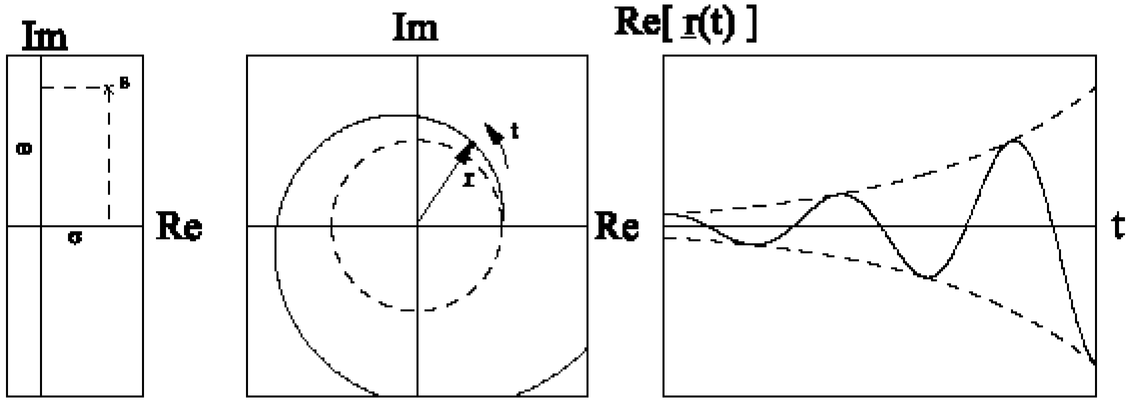


Figura 7. Posición del polo, $\underline{r}(t)$, y respuesta en tiempo real para un polo inestable.