Problema 1:
Este problema tiene en cuenta el sistema mecánico rotacional de la Figura 1.

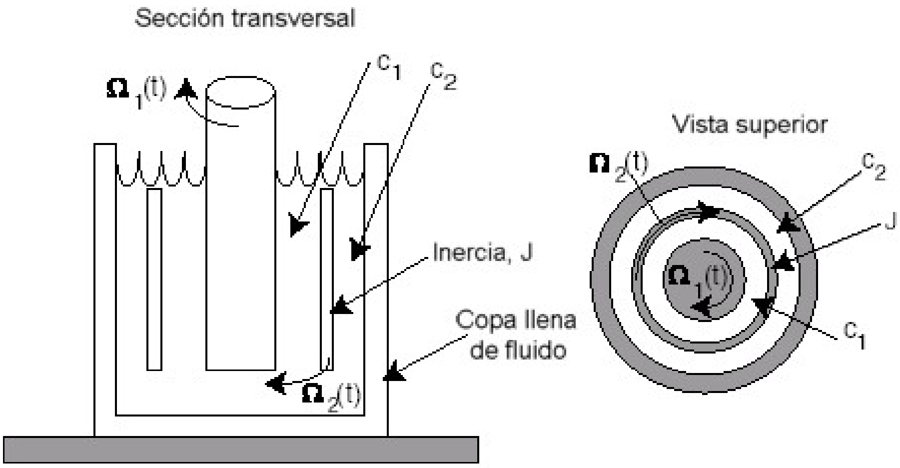

Figura 1. Sección transversal y vista superior.

Este montaje es parecido al que se utilizó en la práctica 2. El eje central rota a una velocidad arbitraria de $\Omega_1(t)$ en una copa llena de fluido que está fijo. A diferencia de la práctica 2, existe un aro intermedio de inercia J apoyado en cojinetes, que no se muestran en la figura. El aro rota con una velocidad angular de $\Omega_2(t)$, tal y como se muestra.
La corona llena de fluido crea un amortiguador c_1 entre el eje y el aro y un amortiguador c_2 entre el aro y la copa. Suponga que cualquier otra amortiguación es insignificante.

a.) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el aro en el que se muestren las torsiones que actúan sobre dicho aro.
b.) Utilice este diagrama de cuerpo libre para derivar una ecuación diferencial en cuanto a $\Omega_1(t)$ y $\Omega_2(t)$ que describa a este sistema. Observe que $\Omega_1(t)$ es una velocidad arbitraria especificada externamente.
c.) Suponga que $\Omega_1(t)$ es un escalón, es decir, $\Omega_1(t) = u_s(t)$, y que $\Omega_2(0) = 0$. Resuelva para el movimiento resultante $\Omega_2(t)$ para $t \geq 0$.
d.) En estado estacionario, ¿qué torsión debe ejercerse en el eje de entrada? ¿Por qué?

Soluciones

a.) En la figura 2 se muestra el diagrama de cuerpo libre para la inercia, así como un esquema de los elementos dinámicos en este problema. Como se puede observar, sobre la inercia actúan dos torsiones: T_1, generada por el amortiguador c_1 entre la entrada y la inercia; y T_2, generada por el amortiguador c_2 entre la inercia y el suelo. Aunque el esquema es útil, no es necesario en la solución.
b.) Con la ayuda del diagrama de cuerpo libre del apartado a, podemos escribir la relación siguiente:

$$\Sigma T = J\dot{\Omega}_2 = T_1 + T_2$$

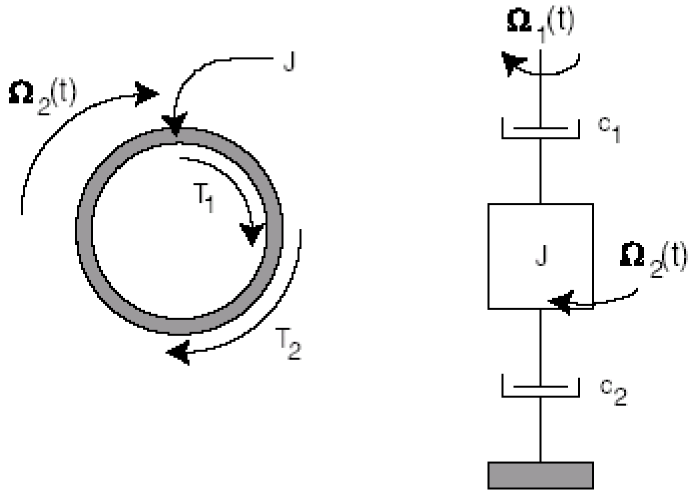

Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de inercia y esquema de un sistema.

En este punto es donde el esquema resulta útil. Si lo estudiamos bien, podemos hallar las relaciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= c_1(\Omega_1 - \Omega_2) \\
T_2 &= -c_2\Omega_2
\end{aligned}
$$

Sustituyendo para T_1 y T_2 se obtiene lo siguiente:

$$J\dot{\Omega}_2 = c_1(\Omega_1 - \Omega_2) - c_2\Omega_2 \Rightarrow \boxed{J\dot{\Omega}_2 + (c_1 + c_2)\Omega_2 = c_1\Omega_1}$$

c.) La entrada al sistema se ha definido como $\Omega_1(t) = u_s(t)$, por lo que la ecuación diferencial para este sistema es:

$$J\dot{\Omega}_2 + (c_1 + c_2)\Omega_2 = c_1 u_s(t)$$

Esta ecuación diferencial (EC) se corresponde con la de la respuesta forzada de primer orden.
Sabemos que la solución para esta ecuación diferencial tiene la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
\Omega_2(t) &= \Omega_h(t) + \Omega_p(t) \text{ donde} \\
\Omega_p(t) &= \Omega_{ss} = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \text{ (Solución particular)} \\
\Omega_h(t) &= Ae^{-st} \text{ (Solución homogénea)} \\
s &= -\frac{c_1 + c_2}{J}
\end{aligned}
$$

Utilizando las condiciones iniciales:

$$\Omega_2(0) \quad = \quad 0 = A + \frac{c_1}{c_1 + c_2} \Rightarrow \; A = -\frac{c_1}{c_1 + c_2}$$

$$\Omega_2(t) = \frac{c_1}{c_1 + c_2}\left(1 - e^{-\frac{c_1+c_2}{J}t}\right)$$

d.) Anteriormente determinamos que:

$$\Omega_{ss} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}$$

Si observamos detenidamente el esquema del sistema, sabemos que la torsión del eje que actúa sobre la inercia es T_1. Puesto que es necesario que las torsiones a cada lado del amortiguador sean iguales, sabemos que la torsión que actúa sobre el eje es igual, y opuesta a T_1. ya que el sistema está en estado estacionario, sabemos que la velocidad del eje es constante, lo que significa que la suma de torsiones que actúan sobre el eje es igual a 0.

$$\Sigma T_{eje} \; = 0 = T_{in} - T_1 \Rightarrow \; T_{in} = T_1$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
T_1 \quad &= \quad c_1(\Omega_1 - \Omega_2) \\
\Omega_1 \quad &= \quad u_s(t) = 1 \\
\Omega_2 \quad &= \quad \Omega_{ss} = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \\
\text{Por lo tanto } T_1 \quad &= \quad c_1\left(1 - \frac{c_1}{c_1 + c_2}\right) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \\
\text{De forma más general } T_1 \quad &= \quad \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}\Omega_1
\end{aligned}$$

Problema 2: volante de juguete.

Un juguete consta de un volante giratorio sujeto sobre un par de cojinetes, tal y como se muestra en la Figura 3. El volante está conectado a una polea, que está envuelta por un cable flexible pero inextensible que va conectado a un muelle. En funcionamiento, el volante está inicialmente en reposo, la cuerda está tensada, en t = 0, y la entrada $x_s(t)$ experimenta un cambio de posición en escalón de magnitud x_0.

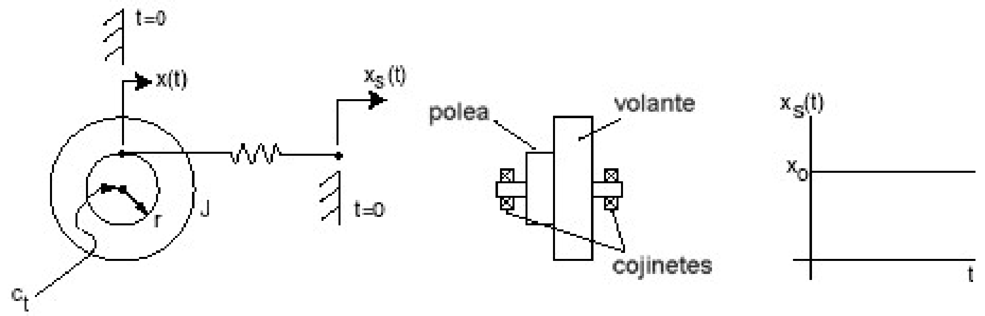

Figura 3.

Suponga que la unidad volante-eje-polea posee una inercia rotacional J. Los cojinetes se pueden modelar como un amortiguador viscoso rotacional de coeficiente c_t. La polea tiene un radio r. El muelle es un muelle lineal ideal con una constante k.

1. Escriba la ecuación del sistema como una ecuación diferencial en $x(t)$, la longitud del cable desenrollado de la polea, así como los parámetros J, r y k del sistema. [Observe que $x(0) = 0$].
2. ¿Para qué rango de valores de c_t (expresado en cuanto a los parámetros J, r y k del sistema) no se tensará nunca el cable?
3. Suponiendo que c_t tiene algún valor distinto de cero tal que el cable no se tensa, escriba una expresión (en cuanto a los parámetros J, r y k del sistema) para la respuesta $x(t)$, es decir, la longitud del cable desenrollado de la polea. Esboce la respuesta, $x(t)$. Indique cuidadosamente el tiempo sobre el cual son válidos el dibujo y la expresión.
4. Suponga que c_t es cero. Escriba una expresión (en cuanto a los parámetros J, r y k del sistema) para t, el tiempo en el que primero se tensa el cable.

Soluciones

1.) En la Figura 4 se muestra el diagrama de cuerpo libre para este sistema. Si se suman las torsiones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Sigma T &= J\ddot{\theta} = T_k - Tc \\
T_k &= rF_k \\
F_k &= k(x_s - x) \\
T_c &= c_t\dot{\theta} \\
\text{por lo tanto, } J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} &= rk(x_s - x)
\end{aligned}$$

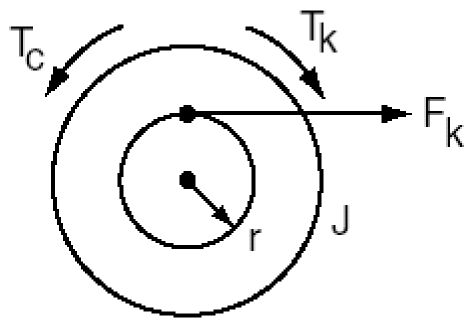

Figura 4.

$$J\ddot{\theta} + c_f\dot{\theta} + rkx = rkx_s$$
$$\text{Recuerde que } r\theta = x \Rightarrow \theta = \frac{x}{r}$$

por lo tanto $\boxed{\frac{J}{r}\ddot{x} + \frac{c_t}{r}\dot{x} + rkx = rkx_s(t)}$

Esto se puede reescribir de la forma siguiente:

$$\ddot{x} + \frac{c_t}{J}\dot{x} + \frac{r^2k}{J}x = \frac{r^2k}{J}x_s(t)$$

b.) Para este apartado, observamos las relaciones siguientes:

$$2\zeta\omega_n \equiv \frac{c_t}{J}$$
$$\omega_n^2 \equiv \frac{r^2k}{J}$$

Para que la cuerda no se tense, el sistema no debe sobreexceder x_0, lo que significa que $\varsigma \geq 1$ y para que esto sea cierto:

$$c_t \geq 2\sqrt{r^2kJ}$$

3.) Para que la cuerda se tense, se debe permitir que el sistema se sobreexceda, o que $\varsigma < 1$. En el caso de que $\varsigma < 1$:

$$x(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \psi)$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Esta ecuación se puede expresar en cuanto a las variables del sistema sustituyendo para ω_n y ς del apartado 3. En la Figura 5 se muestra la respuesta en tiempo para este sistema, donde t^* indica el tiempo después del cual no es válida la respuesta.

4.) Cuando $c_t = 0$, la

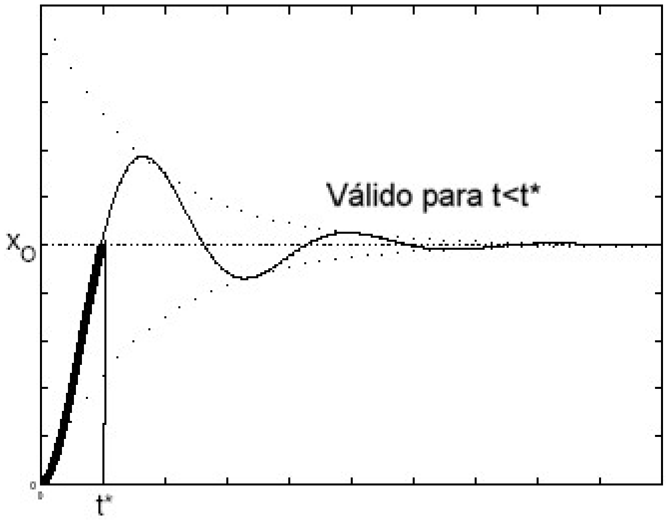

Figura 5.

expresión para $x(t)$ es:

$$x(t) = x_0(1 - \cos\omega_n t)$$

Como ya vimos en el apartado 3, t^* es el tiempo en el que la respuesta pasa x_0. En este caso, tarda un cuarto de círculo en alcanzar x_0, por lo tanto:

$$t^* = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega_n}$$

En la Figura 6 se muestra la respuesta para este sistema.

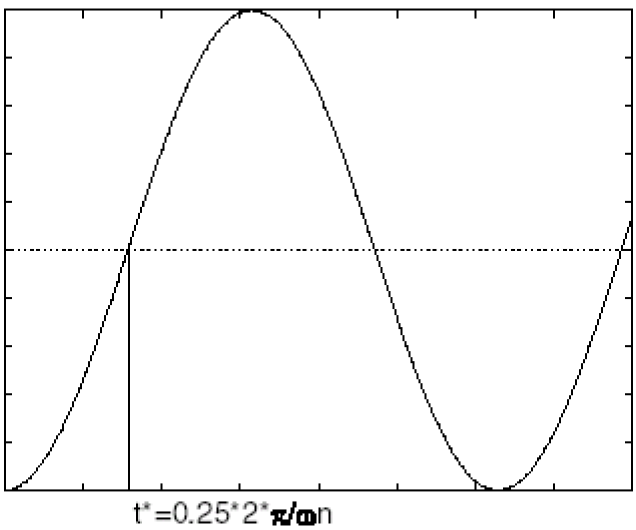

Figura 6