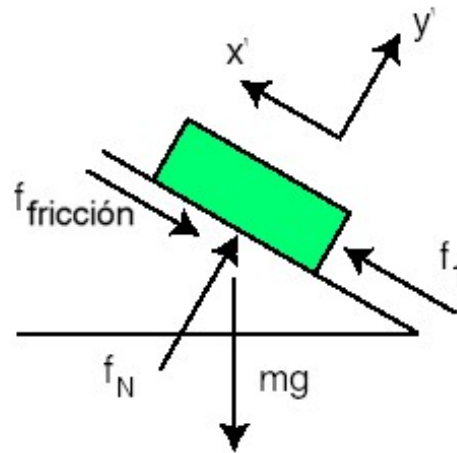


Problema 1: Palm 1.6



- a) Comience siempre un balance de fuerza con un diagrama de cuerpo libre (FBD). Si suponemos que $v > 0$, la fricción seca actuará en oposición a f_1 (tal y como se muestra).

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y'} &= 0 = f_n - mg \cos \phi \\ \Sigma F_{x'} &= m\ddot{x} = f_1 - mg \sin \phi - f_{\text{fricción}} \\ m\ddot{x} &= f_1 - mg \sin \phi - \mu mg \cos \phi \\ \ddot{x} &= f_1/m - g(\sin \phi + \mu \cos \phi)\end{aligned}$$

- b) $m=2$ kg; $\phi = 30^\circ$; $v(0)=3$ m/s; $\mu=0,5$

i)

$$f_1 = 50\text{N}$$

$$\ddot{x} = \dot{v} = 50/2 - 9,8(\sin 30^\circ + 0,5 \cos 30^\circ)$$

$$\dot{v} = 25 - 9,8(0,5 + 0,433) = 15,86(\text{m/s}^2)$$

Para hallar la velocidad es necesario integrar \dot{v} respecto al tiempo:

$$v(t) = \int_0^t \dot{v} dt = \int_0^t 15,86 dt = 15,86t + v(0)$$

$$v(t) = 3 + 15,9t(\text{m/s})$$

ii)

$$f_1 = 5\text{N}$$

$$\ddot{x} = \dot{v} = 5/2 - 9,8(\sin 30^\circ + 0,5 \cos 30^\circ)$$

$$\dot{v} = 2,5 - 9,8(0,5 + 0,433) = -6,64(\text{m/s}^2)$$

La aceleración es ahora negativa, lo que significa que la masa se ralentiza. Para averiguar si la masa se detiene, o si en realidad invierte la dirección y comienza a descender en algún punto, podemos tener en cuenta un nuevo diagrama de cuerpo libre en el que la fuerza de fricción $f_{\text{fricción}}$ actúe en dirección ascendente:

$$\Sigma F_{\hat{x}} = m\ddot{x} = f_1 - mg \sin \phi + f_{\text{fricción}}$$

$$\ddot{x} = f_1/m - g(\sin \phi - \mu \cos \phi) = 2,5 - 9,8(0,5 - 0,433) = 1,8 (\text{m/s}^2)$$

Por consiguiente, si la masa tuviese una velocidad en la dirección descendente (x negativo), la aceleración actuaría como deceleración (ya que la aceleración es positiva). Por lo tanto, la masa no invertirá la dirección, y se detendrá.

Problema 2: Palm 2.5

Para simplificar la operación, pongamos que:

$$f = (T - mg)$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento para este sistema sería:

$$m\dot{v} = T - mg - cv \Rightarrow \dot{v} + \frac{c}{m}v = \frac{f}{m}$$

La ecuación de movimiento es una ecuación diferencial común de primer orden (ODE). La solución general para una ecuación de este tipo de la forma $\dot{u} + p(t)u = f(t)$ y $u(t_0) = b$ es la que se indica a continuación:

$$u(t) = Ke^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_{t_0}^t f(t)e^{P(t)} dt$$

donde,

$$K = be^{P(t)}$$

$$P(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt$$

Si igualamos nuestro sistema con la solución general cuando $h(0) = v(0) = 0$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^t \frac{c}{m} dt = \frac{c}{m} t \\ b &= 0 \Rightarrow K = 0 \\ v(t) &= e^{-\frac{c}{m}t} \int_0^t \frac{f}{m} e^{\frac{c}{m}t} dt = e^{-\frac{c}{m}t} \left(\frac{f}{m} \right) \frac{m}{c} e^{\frac{c}{m}t} \Big|_0^t \\ &= e^{-\frac{c}{m}t} \frac{f}{c} \left(e^{\frac{c}{m}t} - 1 \right) = \frac{f}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \end{aligned}$$

La altura $h(t)$ del cohete es justo la integral de tiempo de la velocidad.

$$\begin{aligned} h(t) &= \int v(t) dt = \int_0^t \frac{f}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) dt \\ &= \frac{f}{c} \left(t + \frac{m}{c} e^{-\frac{c}{m}t} \right) \Big|_0^t = \frac{f}{c} \left(t + \frac{m}{c} \left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

También podemos resolver este problema con la ayuda de las transformadas de Laplace. Para utilizar este método, es necesario que modifiquemos la ecuación de movimiento para justificar la entrada de escalón unitario ($u(t)$):

$$m\dot{v} = T - mg - cv \Rightarrow m\dot{v} + cv = fu(t) \quad \text{para } t > 0$$

Si tomamos la transformada de Laplace correspondiente a este sistema, tenemos:

$$\begin{aligned} L(m\dot{v} + cv) &= v(s)(ms + c) \\ L(fu(t)) &= f \frac{1}{s} \\ v(s)(ms + c) &= f \frac{1}{s} \\ v(s) &= f \left(\frac{1}{s(ms + c)} \right) \end{aligned}$$

Por medio de la expansión de una fracción parcial, obtenemos:

$$v(s) = f \left(\frac{a}{s} - \frac{b}{ms + c} \right) = f \left(\frac{1}{cs} - \frac{m}{c} \frac{1}{ms + c} \right) = \frac{f}{c} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{c}{m}} \right)$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace para hallar $v(t)$, tenemos:

$$L^{-1}(v(s)) = v(t) = \frac{f}{c}(u(t) - e^{-\frac{c}{m}t})$$

$$\text{Por lo tanto, para } t > 0 \quad v(t) = \frac{f}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

Problema 3: Palm 2.6

$$\begin{aligned} 2\dot{v} &= 900 - 8v \Rightarrow \dot{v} + 4v = 450 \\ v(0) &= 0 \end{aligned}$$

De nuevo, hay una ecuación diferencial común de primer orden. Si utilizamos la solución general a una ecuación de este tipo, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^t 4dt = 4t \\ b &= 0 \Rightarrow K = 0 \\ v(t) &= e^{-4t} \int_0^t 450e^{4t} dt = e^{-4t} \left(\frac{450}{4} e^{4t} \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{450}{4} e^{-4t} (e^{4t} - 1) = \frac{450}{4} (1 - e^{-4t}) \end{aligned}$$

También podemos resolver el problema de otra forma mediante las transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned} 2\dot{v} + 8v &= 900u(t) \\ L(2\dot{v} + 8v) &= v(s)(2s + 8) = 2v(s)(s + 4) \\ L(900u(t)) &= \frac{900}{s} \\ v(s) &= 450 \left(\frac{1}{s(s + 4)} \right) = 450 \left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s + 4)} \right) \\ L^{-1}(v(s)) &= 450L^{-1} \left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s + 4)} \right) = \frac{450}{4}(u(t) - e^{-4t}) \\ v(t) &= \frac{450}{4}(1 - e^{-4t}) \quad t > 0 \end{aligned}$$

Dado que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t) dt = \frac{450}{4} \int_0^t (1 - e^{-4t}) dt \\ &= \frac{450}{4} \left(t + \frac{1}{4} e^{-4t} \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{450}{4} \left(t + \frac{1}{4} e^{-4t} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Queremos hallar el tiempo en el que $x = 2500$ m, por lo tanto:

$$\begin{aligned} 2500 &= \frac{450}{4} \left(t + \frac{1}{4} e^{-4t} - \frac{1}{4} \right) \\ t + \frac{1}{4} e^{-4t} &= \frac{200}{9} + 0,25 \simeq 22,47 \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede resolver de forma gráfica o por medio de la iteración newtoniana. En términos más simples, es posible aprovechar el hecho de que un exponencial decae en un 2% de su valor pasados 4τ . Para este caso, $\tau = 0,25$, lo que significa que el término exponencial es, en gran parte, irrelevante pasado 1 segundo. Por lo tanto, $t = 22,47$.

Problemas 4 y 5: Palm 2.9

He combinado las soluciones para los problemas 4 y 5. En el problema 4, solamente se le pide que determine la respuesta estacionaria (v_{ss}) y el tiempo para el 98% de v_{ss} . En el problema 5, se le pide que determine la respuesta de tiempo del sistema y que trace un diagrama de ésta con la ayuda de MATLAB®. Solamente se presenta una fuente de muestra para el trazado de diagramas.

a) $2\dot{v} + v = 10f(t); f(t) = u(t); v(0) = 0;$

Dado que $v(0) = 0$, sabemos que la respuesta de este sistema consiste solamente en la respuesta forzada. Con ayuda de la tabla 2.2-1 del libro, encontramos que para los sistemas de primer orden de la forma $m\dot{v} + cv = f$,

$$v(t) = \frac{f}{c} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$v_{ss} = \frac{f}{c}$$

$$v(4\tau) = 0,98 v_{ss}$$

$$\tau = \frac{m}{c} = \text{constante de tiempo}$$

para nuestro sistema, $m = 2$, $c = 1$ y $f = 10$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\tau &= 2s \\ v(t) &= 10(1 - e^{-\frac{t}{2}}) \\ t_{98\%} &= 4 * 2 = 8s \\ v_{ss} &= 10\end{aligned}$$

Una forma de trazar esta respuesta utilizando MATLAB® es la siguiente:

```
clear all; close all;
% despeja el espacio de trabajo de antiguos diagramas y variables.
m=2; c=1; f=10;
% Crea las variables m, c, y f con los valores listados
tau=m/c;
% Crea y calcula la variable tau.
t=[0:0.01:10]
% Crea un vector a partir de 1-10 s con 1000 puntos.
% Simulado un poco más allá del 98% de tiempo de 8 segundos para la finalización
v=(f/c)*(1-exp(-t/tau));
% Calcula un vector v.
plot(t,v)
% Crea un diagrama X-Y con t en el eje x y v en el eje y.
xlabel('Time (s)'); ylabel('v'); title('time vs. v');
% Crea un título y etiquetas para los ejes x e y.
```

b) Para esta parte, la ecuación de movimiento y la función forzada son idénticas. La única diferencia que existe es que ahora tenemos una condición inicial $v(0) = 5$. Resolvemos esto con el concepto de superposición. Es decir, podemos juntar la solución para la respuesta forzada con la solución para la respuesta libre (que es la respuesta para un sistema con condiciones iniciales, pero sin función forzada) para obtener la respuesta total. A partir de la tabla 2.2-1, encontramos que la respuesta libre es la siguiente:

$$\begin{aligned}v(t) &= v(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \tau &= m/c\end{aligned}$$

Si combinamos la respuesta libre con la forzada, obtenemos:

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{f}{c}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

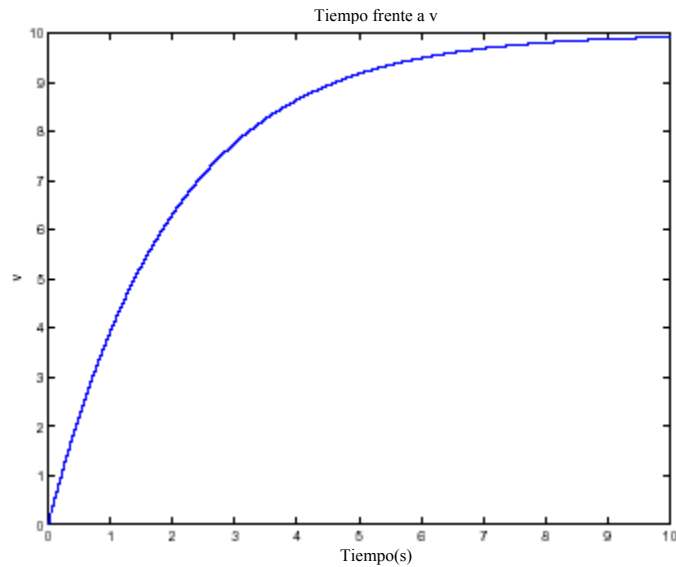


Figura 1: respuesta para el problema 2.9-a.

Dado que τ es igual para la respuesta libre y la forzada y que $v_{ss} = 0$ para el sistema libre:

$$\begin{aligned} t_{98\%} &= 4 * 2 = 8s \\ v_{ss} &= 10 \end{aligned}$$

c) Esto es idéntico al apartado a, excepto que $f(t) = 20u(t)$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} t_{98\%} &= 4 * 2 = 8s \\ v_{ss} &= 200 \end{aligned}$$

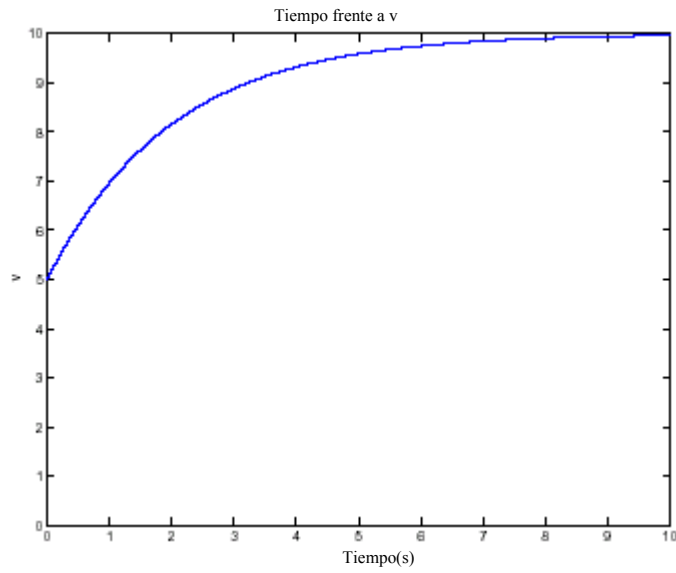


Figura 2: respuesta para el problema 2.9-b.

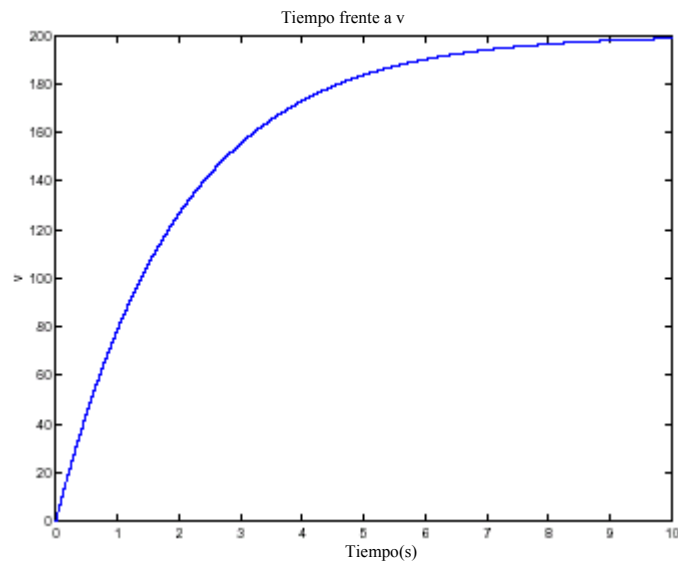


Figura 3: respuesta para el problema 2.9-c.

Problema 6: Palm 1.15

$$\text{a) } (-3 + 5i)(-6 + 7i) = 18 - 21i - 30i - 35 = -17 - 51i$$

b)

$$\frac{-3 + 5i}{-6 + 7i} = \frac{(-3 + 5i)(-6 - 7i)}{(-6 + 7i)(-6 - 7i)} = \frac{18 + 21i - 30i + 35}{36 + 49} = 0,6235 - 0,106i$$

$$\text{a) } x = -10 - 5i = 11,2e^{-2,68i} = 11,2e^{(2\pi - 2,68)i} = 11,2e^{3,61i}$$

Nota: la función 'atan2' de MATLAB® devuelve el ángulo (correcto) de 4 cuadrantes. Al dibujar la posición del número en el plano complejo se debería eliminar la ambigüedad acerca del ángulo del punto en coordenadas polares. El ángulo NO es igual a $26,6^\circ$ (que se encuentra en el primer cuadrante); se encuentra a 180° de distancia de éste a $-153,4^\circ$.

$$\text{b) } x = 6e^{8i} = 6e^{(8-2\pi)i} = 6 \cos(8) + i \sin(8) = 0,87 + 5,9i$$

$$r = 6, \phi = 8 - 2\pi = 1,72 \text{ rad} = 98,4^\circ$$

De nuevo, podría serle de ayuda dibujar la posición del punto.