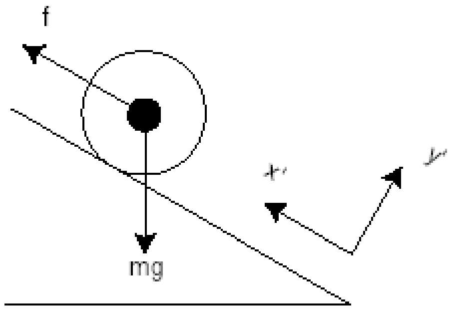
Problema 1: Palm 1.11



Con la ayuda del análisis de las páginas 17-19, podemos calcular una masa para la rueda, con su inercia, que sea dinámicamente equivalente:

$$m_{equiv} = m_{rueda} + \frac{I_{rueda}}{R^2}$$

A continuación, obtenemos la ecuación de movimiento (con la ayuda del DCL que se proporciona en las figuras 1.4-3 y P1.11, equilibrando todas las fuerzas que se dan en el cuerpo para determinar la aceleración de la masa (equivalente):

$$F = m_{equiv} a = m_{equiv} \dot{v}$$
$$\Sigma F_x = f - m_{rueda} g \sin\phi = m_{equiv} \dot{v}$$

Suponiendo que la rueda "no experimente un deslizamiento", las velocidades traslacional y rotacional de la rueda estarán relacionadas de la forma siguiente:

$$v = \omega R$$
$$\int \dot{v} dt = \frac{1}{m_{equiv}} \int (f - m_{rueda} g \sin\phi) dt$$
$$v = \frac{1}{m_{equiv}} (f - m_{rueda} g \sin\phi) \cdot t + c$$

Dado que $v(0) = 0$, la constante de integración es igual a cero: $c = 0$.

$$v = \frac{1}{m_{equiv}} (f - m_{rueda} g \sin\phi) \cdot t$$
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R m_{equiv}} (f - m_{rueda} g \sin\phi) \cdot t$$

A continuación, introduzca los valores que se proporcionaron en el enunciado del problema:

$f = 400$ N, $m_{equiv} = 80$ Kg, $R = 0,3$ m, $I = 3$ Kg-m^2, $\phi = 25º$

$$m_{equiv} = 80 + 3/(0,3^2) = 113,3 \text{ Kg}$$

Pasados 60 s, encontramos los valores siguientes para la velocidad de eje y la velocidad rotacional:

$$v(60) = \frac{1}{113,3}(400 - 80 \cdot 9,8 \cdot \sin 25º) \cdot 60 = 36,4 \,\text{m/s}$$
$$\omega(60) = \frac{1}{113,3 \cdot 0,3}(400 - 80 \cdot 9,8 \cdot \sin 25º) \cdot 60 = 121 \,\text{rad/s}$$

Problema 2: Palm 4.9

Podemos obtener ecuaciones de movimiento para cada sistema creando un balance de fuerza ($F = ma$) para cada “grado de libertad” (DOF) del sistema. Como estamos estudiando un sistema, si una masa (o un nodo sin masa) es libre para moverse sin depender de todos los otros DOF que se identificaron anteriormente, entonces, está relacionada con un DOF de reciente identificación. (Estos sistemas se pueden analizar fácilmente con una inspección, aunque, posiblemente, en los casos más complicados, sea necesario equilibrar las fuerzas en cada DOF.)
a) Existen 2 DOF, x e y. En x, $f_x(t) + k(y - x) = 0$. (Lo cierto es que, en este problema, no nos preocupa $f_x(t)$, aunque, si existe una entrada x, sabemos que se está aplicando esta fuerza). En y, $-c\dot{y} - ky + kx = m\ddot{y}$ (Observe que puede comprobar si los signos son correctos probando cada componente de la parte izquierda de la ecuación y, de esta forma, ver si tiene el efecto adecuado en la aceleración en y). Parece ser que todo lo que necesitamos en este momento es la ecuación en y (puesto que x es la entrada e y la salida, y ya contamos con una ecuación que relaciona directamente el remolque). Por lo tanto, podemos modificar la ecuación de la forma siguiente:

$$m\ddot{y} = c\dot{y} + ky = kx$$

b) Aquí existen 2 DOF, x e y:
En x, $f_x(t) + k(y - x) + c(\dot{y} - \dot{x}) = 0$ (De nuevo, no nos preocupa si existe $f_x(t)$, ya que x es la entrada, pero sabemos que existe algún tipo de fuerza). En y, $kx - ky + c(\dot{x} - \dot{y}) = m\ddot{y}$

Al igual que en el apartado (a), todo lo que necesitamos es esta segunda ecuación:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{x} + kx$$

c) Este sistema rotacional es totalmente análogo al sistema traslacional del apartado (a):

$$\theta_{out}, \; -k\theta_{out} + k\theta_{in} - c\dot{\theta}_{out} = I\ddot{\theta}_{out}$$

Por lo tanto, si modificamos el orden de los elementos, obtenemos:

$$I\ddot{\theta}_{out} + c\dot{\theta}_{out} + k\theta_{out} = k\theta_{in}$$

d) El sistema tiene 3 DOF, x, y, y z:
En el nodo x: $f_x(t) + k_1(y - x) = 0$
Al igual que en el apartado a), lo cierto es que no necesitamos esta ecuación.
En el nodo y: $m_1\ddot{y} = k_1(x - y) + k_2(z - y) - c_1\dot{y}$
En el nodo z: $m_x\ \ddot{z} = k_2(y - z) \ - c_2 z$
Si ponemos estos datos en su forma estándar, tenemos:

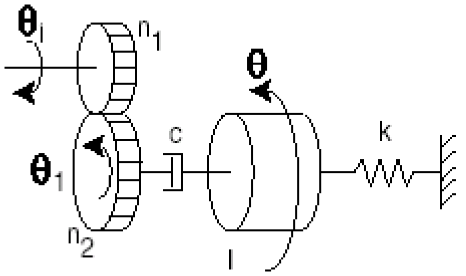
$$\begin{aligned} m_1\ddot{y} + c_1\dot{y} + (k_1 + k_2)y &= k_2 z + k_1 x \\ m_2\ddot{z} + c_2\dot{z} + k_2 z &= k_2 y \end{aligned}$$

e) El sistema tiene 3 DOF, θ_i, θ_1, y θ_2:
En el nodo θ_i: $T\theta_i + k_1(\theta_1 - \theta_i) = 0$
En el nodo θ_1: $I_1\ddot{\theta}_1 = k_1(\theta_i - \theta_1) + c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$
En el nodo θ_2: $I_1\ddot{\theta}_3 = -k_2\theta_2 + c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$
Si modificamos estos datos y los presentamos en la forma estándar, tenemos:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 + c\dot{\theta}_1 + k_1\theta_1 &= k_1\theta_i + c\theta_2 \\ I_2\ddot{\theta}_1 + c\dot{\theta}_2 + k_2\theta_2 &= c\dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

f) El sistema tiene 2 DOF, θ_i, y θ. Le será útil para resolver este problema determinar una variable adicional θ_1, que siga la trayectoria del movimiento del segundo engranaje (véase la figura). Con ayuda de la relación de la tabla 4.3-1 se puede expresar θ_1 en función de θ:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1}{\theta_i} &= \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_i} = \frac{n_1}{n_2} \\ \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta}_i \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}$$

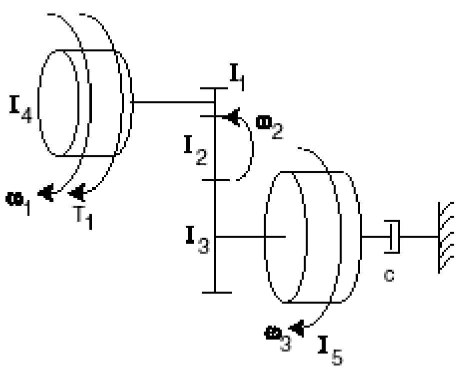


A continuación, en el nodo θ: $I\ddot{\theta} = c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}) - k\theta$

Si sustituimos para θ_1 y presentamos la forma estándar, tenemos:

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = c\dot{\theta}_i \frac{n_1}{n_2}$$

Problema 3: Palm 4.15



En este problema, se le pide que haga que el tren de engranajes se hunda en la estructura ω_1. Existen distintos métodos para conseguir esto, entre los cuales están el hacer equilibrios de fuerza en cada engranaje y el utilizar las relaciones conocidas entre los ratios del engranaje para sustituir ω_2 y ω_3. Un método más sencillo consistiría en determinar la inercia y amortiguamiento equivalente, con la ayuda de las relaciones de la tabla 4.3-1, y hacer que el sistema colapse, comenzando con la estructura ω_3. En dicha estructura, tenemos:

$$\begin{aligned} I_{\omega 3} &= I_5 + I_3 \\ c_{\omega 3} &= c \end{aligned}$$

A continuación, es necesario que averigüemos cuáles son los equivalentes en la estructura ω_2:

$$
\begin{aligned}
I_{e\omega 3} &= I_{\omega 3}\left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = I_{\omega 3}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \\
c_{e\omega 3} &= c\left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = c\left(\frac{1}{5}\right)^2
\end{aligned}
$$

Ahora, en la estructura ω_2:

$$
\begin{aligned}
I_{\omega 2} &= I_2 + I_{e\omega 3} = I_2 + I_{\omega 3}\left(\frac{1}{5}\right)^2 \\
c_{\omega 2} &= c_{e\omega 3} = c\left(\frac{1}{5}\right)^2
\end{aligned}
$$

Así conseguimos los equivalentes de ω_1:

$$
\begin{aligned}
I_{e\omega 1} &= I_{\omega 2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(I_2 + I_{\omega 3}\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
c_{e\omega 1} &= c_{\omega 2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = c\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Por último, podemos añadir todas las inercias a la estructura ω_1:

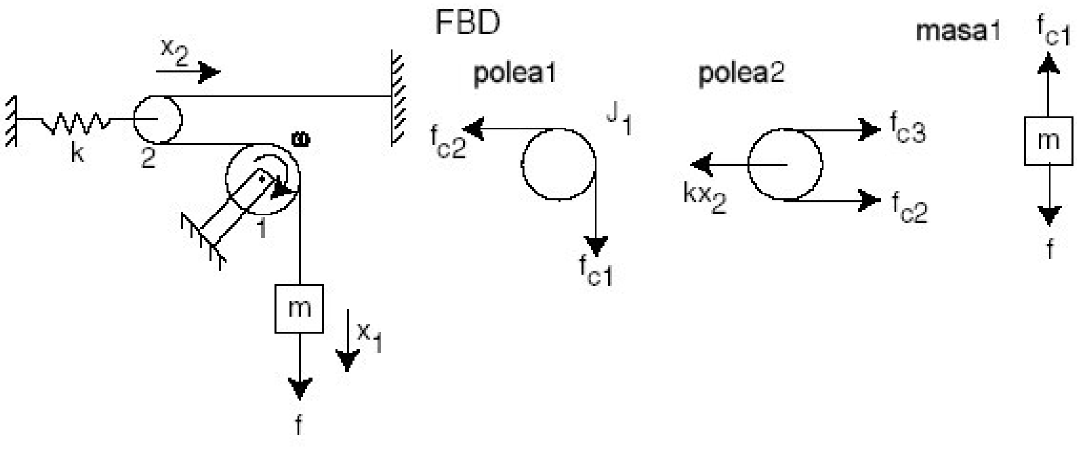
$$
\begin{aligned}
I_T &= I_4 + I_1 + \frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{100}(I_3 + I_5) \\
c_T &= \frac{1}{100}c
\end{aligned}
$$

La ecuación de movimiento de este sistema es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= I_T\dot{\omega}_1 + c_T\omega_1 \\
T_1 &= \left(I_4 + I_1 + \frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{100}(I_3 + I_5)\right)\dot{\omega}_1 + \frac{1}{100}c\omega_1 \\
T_1 &= 0.461\dot{\omega}_1 + 0.04\omega_1
\end{aligned}
$$

Problema 4: Palm 4.21

Dándose esta solución, se supone que no existe ningún tipo de deslizamiento en las poleas. Para comenzar, observamos que $x_1 = 2x_2$. Este sistema se puede dividir en 3 nodos centrados en m_1, en la polea 1 y la polea 2.



a) En este apartado, nos indican que la masa y las inercias de las poleas son insignificantes, por lo que suponemos que las fuerzas en cada nodo tienen como resultado lo siguiente:

En la polea 1: $I_1\dot{\omega}_1 \quad = \quad 0 = \Sigma T_1 = R(f_{c1} - f_{c2}) \Rightarrow f_{c1} = f_{c2}$

En la polea 2: $I_2\dot{\omega}_2 \quad = \quad 0 = \Sigma T_2 = r(f_{c2} - f_{c3}) \Rightarrow f_{c2} = f_{c3}$

$$m_2\ddot{x}_2 \quad = \quad 0 = \Sigma F = f_{c2} + f_{c3} - kx_2 \Rightarrow f_{c1} = f_{c2} = f_{c3} = \frac{kx_2}{2}$$

En la masa 1: $m_1\ddot{x}_2 \quad = \quad \Sigma F = f - f_{c1} = f - \dfrac{kx_2}{2}$

Donde fc_1 es la tensión del cable que va desde la polea 1 hasta la masa 1, fc_2 la tensión del cable que va desde la polea 1 a la 2, y fc_3 la tensión del cable que va desde la polea 1 hasta la tierra. Si se expone todo de nuevo en lo que respecta a x_1, obtenemos lo siguiente:

$$m_1\ddot{x}_1 + \frac{kx_1}{4} = f$$

b) En este apartado, la inercia y la masa de la polea 2 siguen siendo insignificantes, pero ahora, la polea 1 posee masa (puesto que la polea 1 no experimenta translación, no se introducirá en nuestras ecuaciones) e inercia. Si sumamos ahora las fuerzas en los nodos, obtenemos el resultado siguiente:

En la polea 1: $I_1\dot{\omega}_1 \quad = \quad \Sigma T_1 = R(f_{c1} - f_{c2})$

En la polea 2: $I_2\dot{\omega}_2 \quad = \quad 0 = \Sigma T_2 = r(f_{c2} - f_{c3}) \Rightarrow f_{c2} = f_{c3}$

$$m_2\ddot{x}_2 \quad = \quad 0 = \Sigma F = f_{c2} + f_{c3} - kx_2 \Rightarrow f_{c2} = f_{c3} = \frac{kx_2}{2}$$

En la masa 1: $m_1\ddot{x}_2 \quad = \quad \Sigma F = f - f_{c1}$

Nota: $$R\omega_1 = \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{\omega}_1 = \frac{\ddot{x}_1}{R}$$

Resolviendo para:

$$x_1,\ I_1\frac{\ddot{x}_1}{R} = R\left(f - m_1\ddot{x}_1 - \frac{kx_1}{4}\right)$$
$$\left(\frac{I_1}{R^2} + m_1\right)\ddot{x}_1 + \frac{kx_1}{4} = f$$