Problema 1: Palm 2.24

Todos estos problemas son de segundo orden, por lo tanto, se pueden hallar las raíces de las ecuaciones características mediante la fórmula cuadrática:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

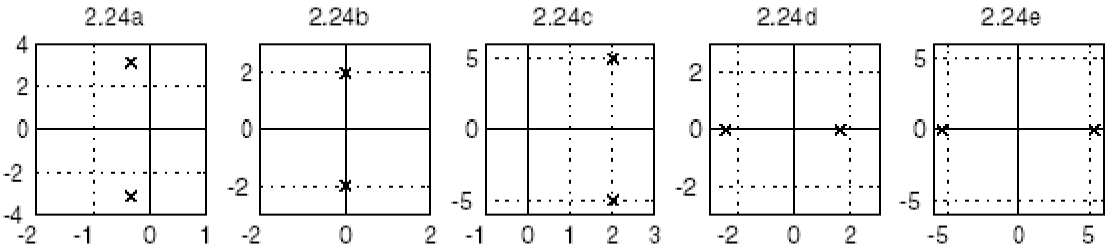

Figura 1: diagrama de la polea para 2.24

a) $s_{1,2} = -0{,}3333 \pm 3{,}1447i$, estable.
b) $s_{1,2} = \pm 3{,}1447i$, marginalmente estable.
c) $s_{1,2} = 2 \pm 5i$, inestable.
d) $s_{1,2} = -2{,}4396,\ 1{,}6396$, inestable.
e) $s_{1,2} = \pm 5{,}3853$, inestable.

Problema 2: Palm 2.22

a) $s_{1,2} = -5, -2$, no se da oscilación, respuesta dominada por el polo – 2, por lo tanto $\tau_d = 0{,}5$, $t_{settle} = 4\tau = 2$ s.
b) $s_{1,2} = -2, -2$, raíz repetida, no se da oscilación, $\tau_d = 0{,}5$, $t_{settle} = 4\tau = 2$ s.
c) $s_{1,2} = -2 \pm 5i$, hay oscilación, $\tau = 0{,}5$, $t = 4\tau = 2$ s, $\omega = 5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Problema 3: Palm 2.15

Aunque es posible resolver esta cuestión utilizando únicamente las fórmulas en la tabla 2.3-1, creo que sería valioso ver si esas soluciones han sido derivadas. En general, la solución para cualquier sistema de segundo orden no forzado $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ es:

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

donde,
$s_{1,2}$ = las raíces de la ecuación característica

Se pueden expresar *A* y *B* en referencia a las condiciones iniciales del sistema de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = A + B \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 = As_1 + Bs_2 \\ A &= \frac{\dot{x}_0 - s_2 x_0}{s_1 - s_2} \\ B &= \frac{\dot{x}_0 - s_1 x_0}{s_2 - s_1} \end{aligned}$$

Sin tener que hacer nada más, hasta ahora, la solución se corresponde con la del caso 1 (raíces distintas reales) de la tabla 2.3-1. La solución para el caso 2 (raíces repetidas reales) se puede encontrar en cualquier libro de texto sobre ecuaciones diferenciales. La solución del caso 3 (pares conjugados complejos) se expone aquí, ya que es la más difícil e interesante. En el caso de los pares conjugados complejos, la solución a la ecuación característica es la siguiente:

$$s_1 = a + bj \text{ y } s2 = a - bj$$

Si se sustituyen estos valores en la solución general homogénea, obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(a+bj)t} + Be^{(a+bj)t} \\ &= e^{at}(Ae^{bjt} + Be^{-bjt}) \end{aligned}$$

Nota: $e^{(a+bj)t} = e^{at}e^{bjt}$

Si sustituimos los mismos valores en nuestras expresiones generales para *A y B*, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\dot{x}_0 - (a-bj)x_0}{a+bj-a+bj} = \frac{\dot{x}_0 - x_0(a-bj)}{2bj} \\ B &= \frac{\dot{x}_0 - (a+bj)x_0}{a-bj-a-bj} = -\frac{\dot{x}_0 - x_0(a+bj)}{2bj} \end{aligned}$$

Con la ayuda de la fórmula de la identidad de Euler para exponenciales complejos, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{bjt} &= \cos bt + j\sin bt \\ e^{-bjt} &= \cos -bt + j\sin -bt = \cos bt - j\sin bt \end{aligned}$$

Nota: $\begin{aligned} \cos -bt &= \cos bt \\ \sin -bt &= -\sin bt \end{aligned}$

Si combinamos la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}\left(\frac{\dot{x}_0 - x_0(a-bj)}{2bj}(\cos bt + j\sin bt) - \frac{\dot{x}_0 - x_0(a+bj)}{2bj}(\cos bt - j\sin bt)\right) \\ &= e^{at}\left(\frac{\dot{x}_0 - x_0(a-bj) - \dot{x}_0 - x_0(a+bj)}{2bj}\cos bt + \frac{\dot{x}_0 - x_0(a-bj) + \dot{x}_0 - x_0(a+bj)}{2b}\sin bt\right) \\ &= e^{at}(x_0\cos bt + \frac{\dot{x}_0 - x_0 a}{b}\sin bt) \end{aligned}$$

Con la ayuda de la identidad trigonométrica,

$$A\cos bt + B\sin bt = \sqrt{A^2+B^2}\sin(bt+\phi)$$

donde,

$$\phi = \tan^{-1}\frac{A}{B}$$

Podemos demostrar que:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}\sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x} - x_0 a)^2}{b^2}}\sin(bt+\phi) \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{x_0 b}{\dot{x}_0 - a x_0} \end{aligned}$$

Esta expresión es la equivalente a la de la tabla 2.3-1. La expresión ligeramente distinta es debido a que no supongo que a es un número negativo.
Para todas las secciones, $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 1$

a) $s_{1,2} = -2 \pm 2i$, par conjugado complejo.

$$x(t) = e^{-2t}\sin 2t$$

b) $s_{1,2} = -6, -2$, raíces distintas reales.

$$x(t) = 0,25e^{-2t} - 0,25e^{-6t}$$

c) $s_{1,2} = -2, -2$, raíces repetidas

$$x(t) = t^{-2t}$$

Esta es, en parte, una pregunta capciosa, ya que necesita tener más información para poder determinar *k* y *c*. Concretamente, necesita conocer el periodo de oscilación. Aún así, podemos determinar ζ mediante el decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{B_i}{B_{i+n}}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}}$$

$$\delta = \frac{1}{30}\ln\frac{1}{0,5} = 0,0536$$

$$\zeta = \frac{0,0536}{\sqrt{(2\pi)^2+0,0536^2}} = 0,0085$$

Si tuviésemos el periodo *P*, podríamos calcular *k* y *c* mediante las relaciones siguientes:

$$k = m\omega_n^2 = \frac{m\omega_d^2}{1-\zeta^2} = \frac{m(2\pi/P)}{1-\zeta^2}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

Problema 5: ejemplo 4.3-3 de Palm

La ecuación característica para este problema es la siguiente:

$$I_e\ddot{\theta} + c_e\dot{\theta} + k_e\theta = 0$$

donde,

$$I_e = I_m + I_s + \frac{m_pR^2}{2} + m_rR^2$$

$$k_e = kR^2$$

Esto quiere decir que:

$$\omega_n^2 = \frac{k_e}{I_e} = \frac{kR^2}{I_m + I_s + \frac{m_pR^2}{2} + m_rR^2}$$

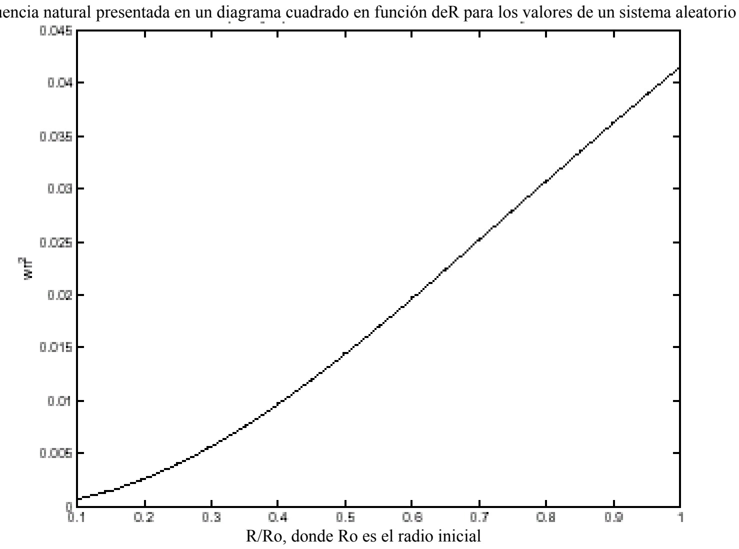

Figura 2: frecuencia natural frente a R.

Resulta difícil percibirlo, ya que tanto el numerador como el denominador contienen a R, aunque podemos ver que R hace que disminuya el denominador y converge en un valor real positivo, mientras que el numerador converge a un valor igual a cero. De esta forma, la frecuencia natural del sistema disminuye a medida que lo hace R. En la figura 1 se ilustra cómo disminuye la frecuencia natural a medida que R se hace más pequeño para este sistema con algunos conjuntos de valores para I, R, m y k.

Problema 6: Palm 1.21

a) ≫(-3+5i)*(-6+7i)
resp = -17-51i
b) ≫(-3+5i)/(-6+7i)
resp = 0,625-0,1059i
c)≫3*i/2
resp = 0 + 1,5i
d) ≫3/(2i)
resp = 0-1,5i

Problema 7: Palm 1.22

a)≫x=-5-7i;y=6+2i
≫x+y
resp = 1-5i
b) ≫x*y
resp =-16-52i
c) ≫x/y
resp = -1,1-0,8i