## Problemas 1 y 2: Palm 2.25 y 2.26

He combinado las soluciones de los dos primeros problemas en una sola. En el problema 2.25, tendrá que hallar las raíces de la ecuación característica ($s_1$ y $s_2$), la respuesta estacionaria ($x_{ss}$) y el tiempo para alcanzar un estado estacionario ($t_{ss}$). En el problema 2.26, tendrá que hallar la respuesta de tiempo ($x(t)$) con la ayuda de la tabla 2.3-2. Un comentario rápido para hallar $x_{ss}$: la manera apropiada para hallar el valor del estado estacionario de $x$ sería la siguiente:

$$x_{ss} = lim_{x\to\infty} x(t)$$

Dado que este método es tedioso y requiere que haya formulado $x(t)$, puede hacer una pequeña trampa y mirar simplemente la ecuación diferencial del problema y descartar cualquier término basado en el tiempo..

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= f \text{ se convierte en,} \\ kx &= f \\ x_{ss} &= \frac{f}{k} \end{aligned}$$

Aunque esto *suele* funcionar, no siempre es así.

**a)**

$$\begin{aligned} s_1 &= -5,\ s_2 = -2,\ x_{ss} = \frac{4}{3},\ t_{ss} = 4\tau = -\frac{4}{s_2} = 2s \\ x(t) &= \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}e^{-5t} - \frac{5}{3}e^{-2t} + 1\right) \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 = -2,\ x_{ss} = \frac{72}{20},\ t_{ss} = 4\tau = -\frac{4}{s_2} = 2s \\ x(t) &= \frac{72}{20}\left[(-2t-1)e^{-2t} + 1\right] \end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -2 \pm 5i,\ x_{ss} = \frac{95}{58},\ t_{ss} = 4\tau = -\frac{4}{a} = 2s \\ x(t) &= \frac{95}{58}\left[\frac{1}{5}\sqrt{\frac{58}{2}}e^{-2t}\sin(5t + 4.33) + 1\right] \end{aligned}$$

Nota: para este problema, tendrá que asegurarse de que utiliza la función tangente con 2 argumentos.

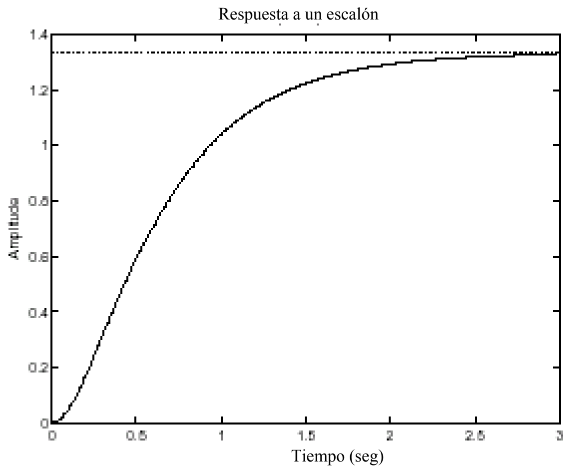


Figura 1: respuesta a un escalón para el problema 2.26a

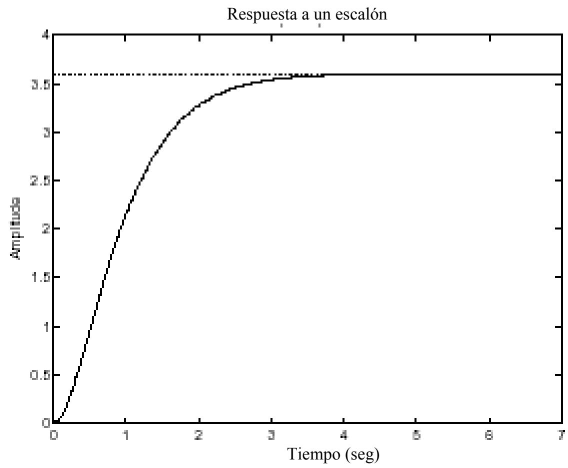


Figura 2: respuesta a un escalón para el problema 2.26b

## Problema 3: Palm 4.26

Las raíces de la ecuación característica $(\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 2)$ para este problema son $s_{1,2} = -2 \pm 2i$.

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\
2\omega_n\zeta &= 4 \\
\zeta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
x_{ss} &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\
P.O. &= 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\frac{\pi 0.707}{\sqrt{1-0.5}}} = 4.3\%
\end{aligned}$$

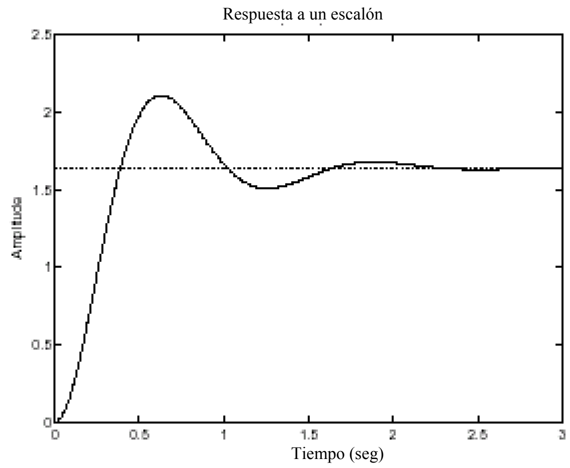


Figura 3: respuesta a un escalón para el problema 2.26c

Sobreexceso = $P.O. * x_{ss}/100 = 0,01$

$$\tau = -\frac{1}{\zeta\omega_n} \Rightarrow t_{2\%} = 4\tau = 2s$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\text{s}$$

$$t_r = \frac{2\pi - \phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi - \frac{5}{4}\pi}{\omega_d} = \frac{1{,}25\pi}{2} = 1{,}179s$$

$$t_d \approx \frac{1+0{,}7\zeta}{\omega_n} = \frac{1+0{,}7*0{,}707}{3{,}332} = 0{,}53s$$

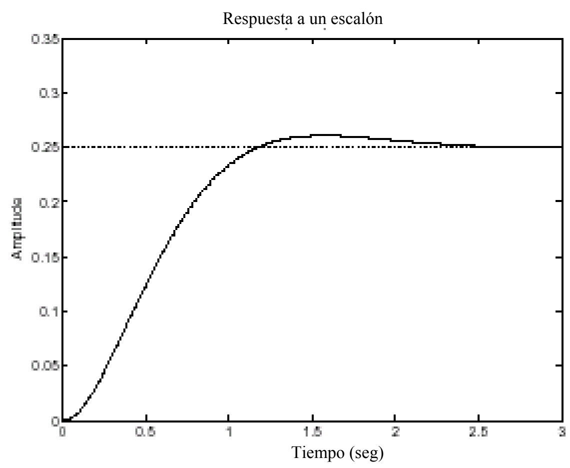


Figura 4. respuesta a un escalón para el problema 4.26

## Problema 4: Palm 4.28

Dado: $9\ddot{x} + c\dot{x} + 4x = f$ , donde $f = u(t)$. Porcentaje de sobreexceso, 20% max., $t_{aumento} 100\% \leq 3s$
Solución:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$M_p = 20 = 100e^{1\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \ln 0.2 = -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta_{min} = \left(\frac{1}{\frac{\pi^2}{(\ln 0.2)^2} + 1}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}4559$$

El valor de $\zeta$ debe ser mayor o igual al que se ha hallado anteriormente o el sistema experimentará un sobreexceso (el requisito de funcionamiento dominante) superior al 20%.

$$t_{aumento}\ 100\% = \frac{2\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi - 4{,}2389}{0{,}66\overline{6}\sqrt{1-0{,}4559^2}} = 3{,}44s$$

$$\phi = \tan^{-}1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} + \pi = 4{,}2389$$

Queda claro que no vamos a poder alcanzar los dos requisitos. La razón es que, para aumentar el tiempo de subida tenemos que disminuir el valor de $\zeta$, o aumentar $\omega n$. Puesto que no podemos controlar $\omega n$ para este sistema, la única opción que nos queda es disminuir el valor de $\zeta$, aunque esto hará que aumente el sobreexceso, que, como ya sabemos, es el requisito dominante. Dado nuestro valor mínimo de $\zeta$, hallamos:

$$\frac{c}{9} = 2\omega_n \zeta \Rightarrow c = 18\left(\frac{2}{3}\right)0{,}4559 = 5{,}47$$

Es posible resolver también este problema de una forma menos rigurosa utilizando los valores de la figura 4.4-10. Mediante este método:

$$\zeta = 0{,}43$$
$$c = 5{,}16$$

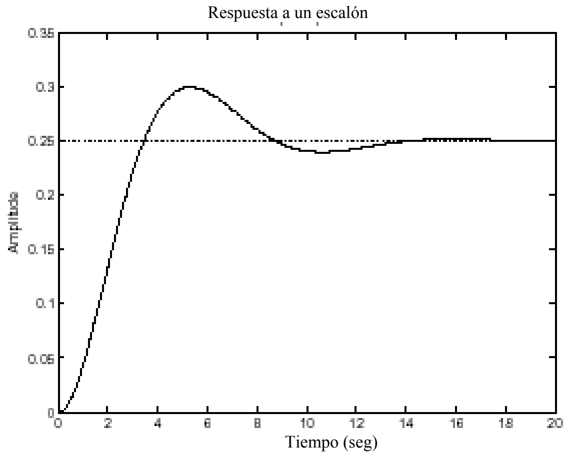


Figura 5: respuesta a un escalón para el problema 4.28