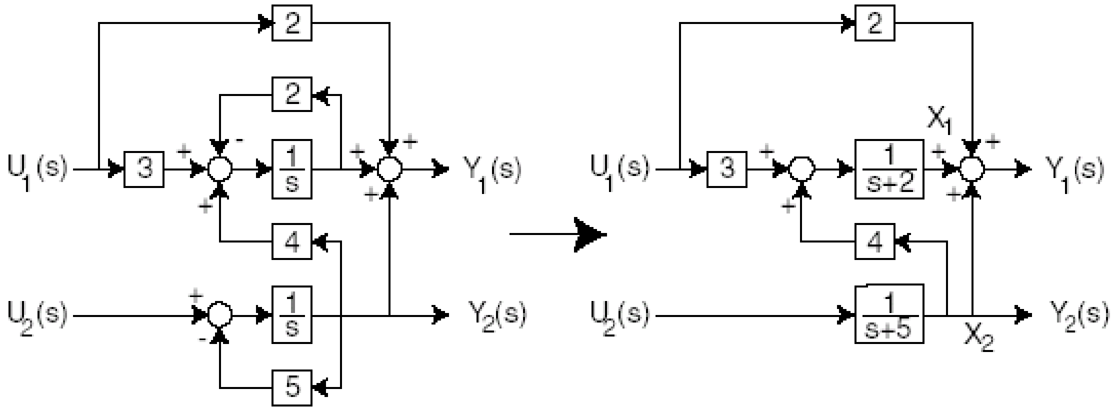
Problema 1: Palm 3.45



a) La clave de este problema está en seleccionar los x_1 y x_2 adecuados. En la mayoría de los casos, nos gustaría elegir las variables de estado que representan los estados de la energía del sistema. En este caso concreto, tenemos dos integradores. La potencia de salida de estos integradores corresponde a los estados naturales de este sistema. Por lo tanto, se han seleccionado x_1 y x_2 para que sean las potencias de salida de los integradores, tal y como se muestra en la figura anterior. Personalmente, he optado por simplificar el diagrama de bloques, pero no es necesario. Si examinamos el diagrama de bloques obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{s+2}(4x_2 + 2u_1) \;\rightarrow\; \dot{x}_1 = -2x_1 + 4x_2 + 3u_1 \\
x_2 &= \frac{1}{s+5}(u_2) \;\rightarrow\; \dot{x}_2 = -5x_2 + u_2 \\
y_1 &= x_1 + x_2 + 2u_1 \\
y_2 &= x_2
\end{aligned}
$$

Si expresamos esto en forma estado-espacio, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

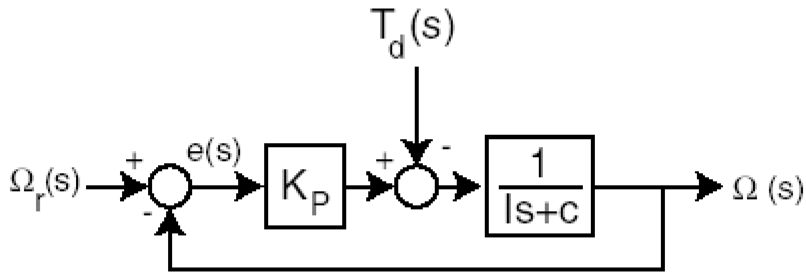
b) Las cuatro funciones de transferencia que estamos tratando de hallar son: $\frac{y_1}{u_1}$, $\frac{y_1}{u_2}$, $\frac{y_2}{u_1}$ y $\frac{y_2}{u_2}$.
Resulta posible hallar la función de transferencia mediante la manipulación de la matriz, pero yo he optado por resolverlo a través de un examen directo.

$$\begin{aligned}
x_1(s) &= \frac{3}{s+2} \\
y_1(s) &= 2u_1 + x_1 = \left(2 + \frac{3}{s+2}\right) u_1 \\
\frac{y_1(s)}{u_1(s)} &= \frac{2s+7}{s+2} \\
x_2(s) &= \frac{1}{s+5} u_2(s) \\
y_1(s) &= x_2(s) + \frac{4}{s+2} x_2(s) = \left(\frac{1}{s+5} + \frac{4}{(s+2)(s+5)}\right) u_2(s) \\
\frac{y_1(s)}{u_2(s)} &= \frac{s+6}{(s+2)(s+5)} \\
\frac{y_2(s)}{u_1(s)} &= 0 \\
\frac{y_2(s)}{u_2(s)} &= \frac{1}{s+5}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
y_1(s) &= \frac{y_1(s)}{u_1(s)} u_1(s) + \frac{y_1(s)}{u_2(s)} u_2(s) = \frac{2s+7}{s+2} u_1(s) + \frac{s+6}{(s+2)(s+5)} u_2(s) \\
(s+2)(s+5) y_1(s) &= (2s+7)(s+5) u_1(s) + (s+6) u_2(s) \\
(s^2+7s+10) y_1(s) &= (2s^2+17s+35) u_1(s) + (s+6) u_2(s) \\
\ddot{y}_1 + 7\dot{y}_1 + 10 y_1 &= 2\ddot{u}_1 + 17\dot{u}_1 + 35 u_1 + \dot{u}_2 + 6u_2 \\
y_2(s) &= \frac{y_2(s)}{u_2(s)} u_2(s) = \frac{1}{s+5} u_2(s) \\
(s+5) y_2(s) &= u_2(s) \\
\dot{y}_2 + 5y_2 &= u_2
\end{aligned}$$

Problema 2: Palm 7.8



He comenzado este problema escribiendo las funciones de transferencia para el error de ambas entradas:

$$\frac{e}{T_d} = \frac{1}{Is + (c + K_p)}$$

$$\frac{e}{\Omega_r} = \frac{Is + c}{Is + (c + K_p)}$$

a)

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\frac{Is + c}{Is + (c + K_p)}\frac{1}{s} = \frac{c}{c + K_p}$$

$$e_{ss} = 0,1 \Rightarrow K_p = 45$$

$$\tau = \frac{I}{c + K_p} = 0,2\ s$$

$$e_{ss-T_d} = \lim_{s \to \infty} s\frac{1}{Is + (c + K_p)}\frac{1}{s} = \frac{1}{c + K_p} = 0,02$$

b)

$$K_p = 495$$

$$\tau = 0,02\ s$$

$$e_{ss-T_d} = 0,002$$

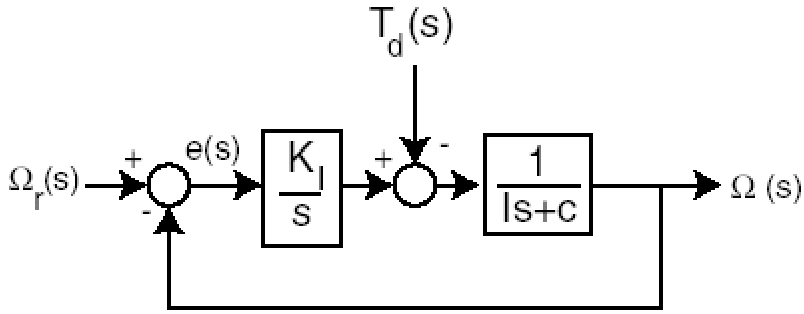
c)

$$\tau = \frac{I}{c + K_p} = 0,1 \Rightarrow K_p = 95$$

$$e_s s = 0,05$$

$$e_{ss-T_d} = 0,01$$

Problema 3:Palm 7.9



He comenzado este problema escribiendo las funciones de transferencia para el error de ambas entradas:

$$\frac{e}{T_d} = \frac{s}{Is^2 + cs + K_I}$$
$$\frac{e}{\Omega_r} = \frac{Is^2 + cs}{Is^2 + cs + K_I}$$

a)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_I}{I}}$$
$$2\zeta\omega_n = \frac{c}{I}$$
$$K_I = \frac{c^2}{4\zeta^2 I} = 0{,}625$$
$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = 4$$

b)

$$K_I = 2{,}5e-4$$
$$\tau = 200$$