

Soluciones del boletín de problemas 4

Problema 1. Se puede resolver el problema utilizando la ecuación para obtener la velocidad en cualquier punto del cuerpo rígido en 2D. La ecuación del problema es la siguiente:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Puesto que la escalera se resbala, la dirección de la velocidad angular es normal en sentido contrario a las agujas del reloj a la parte exterior de la cara. En la figura 1 se puede mostrar la dirección del producto vectorial de ω y r una vez que se establezca la magnitud de la velocidad angular como ω . Sin embargo, no conocemos todavía la magnitud del producto vectorial. Además, conocemos que la dirección de la velocidad del punto A, debida a las limitaciones geométricas entre el mismo punto A y la pared vertical, es vertical, tal como se muestra en la figura 1.

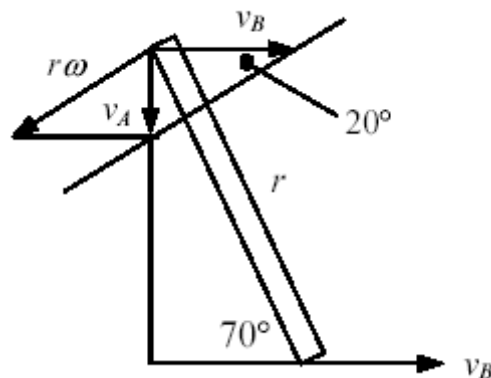


Figura 1

El triángulo formado incluye v_A y v_B con un ángulo de 20° , tal como se muestra en la figura 1.

$$v_A = v_B \tan(20^\circ) = 2 \tan(20^\circ) = 0.73(m/s)$$

Problema 2. Movimiento de una partícula confinada en un tubo circular montado sobre un pivote. El tubo circular, montado sobre un pivote en un punto fijo O, y obligado a permanecer en el plano del dibujo, tiene un único grado de libertad. La partícula m , que se desliza forzosamente por el interior del tubo, tiene un grado adicional de libertad.

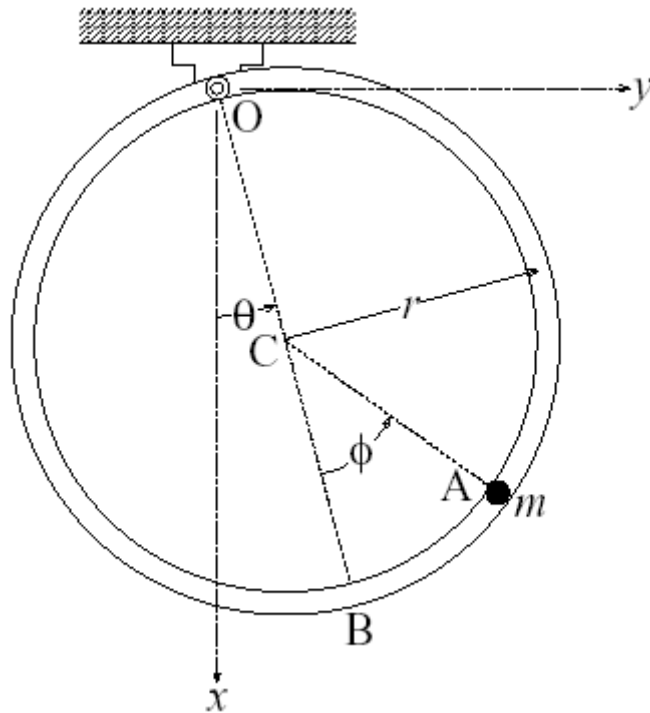


Figura 2: tubo circular colgante que contiene una partícula de masa m .

La ubicación del tubo circular se fija proporcionando la orientación de una línea pintada en el tubo respecto a una dirección de referencia. Aquí conviene utilizar la línea OB correspondiente al diámetro del tubo, la cual es vertical cuando el tubo cuelga en su posición más baja, y utilizar la dirección vertical Ox como la dirección de referencia. Por tanto, la posición del tubo circular se fija proporcionando un ángulo θ . La posición A de la partícula m se fija entonces proporcionando el ángulo ϕ . La posición de la partícula respecto a la coordenada fija del sistema Oxy es:

$$x = r \cos \theta + r \cos(\theta + \phi) \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta + r \sin(\theta + \phi)$$

Los componentes de la velocidad de la partícula se obtienen diferenciando estos componentes de desplazamiento respecto al tiempo.

$$\dot{x} = -r\dot{\theta} \sin \theta - r(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin(\theta + \phi) \quad \text{y} \quad \dot{y} = r\dot{\theta} \cos \theta + r(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\theta + \phi)$$

Estos componentes se pueden añadir de manera vectorial para obtener el dibujo que se indica a continuación:

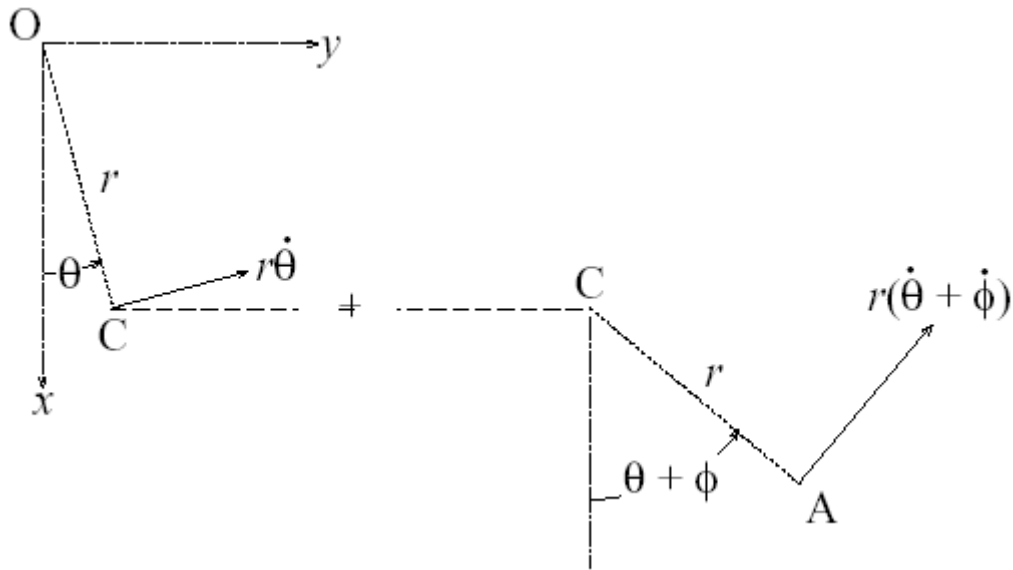


Figura 3: suma vectorial de los componentes de la velocidad.

La velocidad total de la partícula de masa en el punto A es la suma vectorial de dos vectores. El primer vector tiene una magnitud $r\dot{\theta}$ y es perpendicular a la línea OC. Un proceso alternativo para obtener este vector sería aplicar la fórmula vectorial general, derivada en clase, al elemento rígido OC.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

donde $\vec{v}_O = 0$ y $\vec{\omega}$, la velocidad angular del elemento rígido OC, es $\dot{\theta}$ en la dirección opuesta al sentido de las agujas del reloj, y \vec{r} es el vector de desplazamiento \overline{OC} .

El segundo vector tiene una magnitud $r(\dot{\theta} + \phi)$ y es perpendicular al elemento rígido CA. Representa el segundo término de la fórmula general:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

donde, ahora, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular $\dot{\theta} + \phi$ en la dirección opuesta al sentido de las agujas del reloj del elemento rígido CA, y \vec{r} es el vector de desplazamiento \overline{CA} .

Problema 3. Velocidades en el cigüeñal y en el mecanismo de biela. En el problema, las longitudes a y b eran iguales y el ángulo θ tenía los valores especiales 0 y $\pi/2$. Para estos casos especiales el problema se puede resolver de una forma muy sencilla. En el caso general, donde a y b son distintos y θ es un ángulo arbitrario, el análisis cinemático del cigüeñal y del mecanismo de biela es sorprendentemente difícil. Aquí se explica a grandes rasgos el caso general y posteriormente se describe una solución sencilla y directa para los casos especiales. A pesar de que el sistema tiene

solamente un grado de libertad θ , es conveniente realizar el análisis preliminar en término de dos ángulos θ , y ϕ , y, a continuación, introducir la conexión entre ϕ y θ .

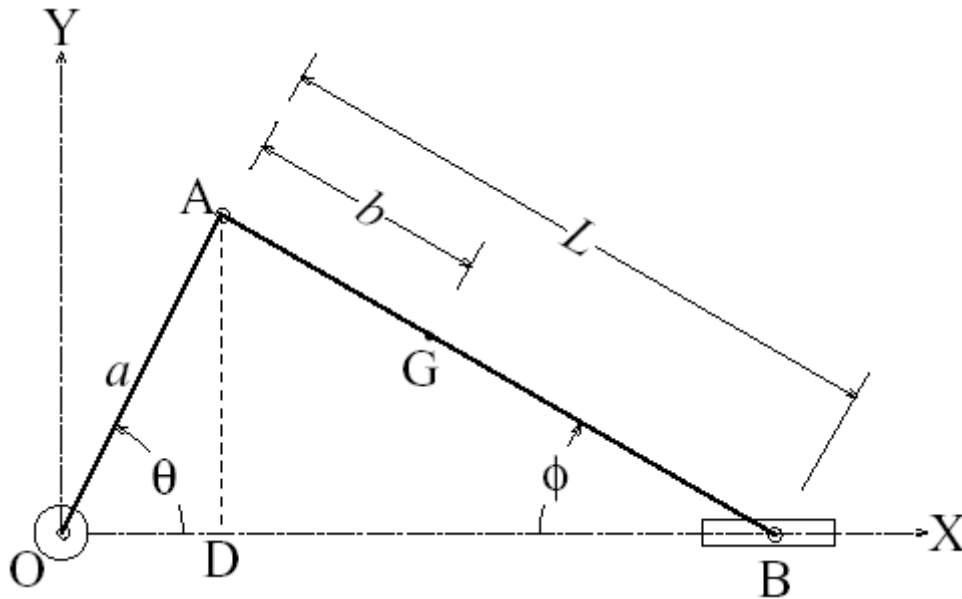


Figura 4: cigüeñal y biela: caso general.

Los componentes X e Y del desplazamiento del punto G son:

$$x_G = a \cos \theta + b \cos \phi \quad \text{y} \quad y_G = a \sin \theta - b \sin \phi$$

Los componentes de la velocidad del punto G son:

$$\dot{x}_G = -a\dot{\theta} \sin \theta - b\dot{\phi} \sin \phi \quad \text{y} \quad \dot{y}_G = a\dot{\theta} \cos \theta - b\dot{\phi} \cos \phi$$

La conexión entre ϕ y θ se obtiene expresando de dos formas distintas la longitud AD .

$$a \sin \theta = L \sin \phi \tag{1}$$

de la que se deduce que:

$$\sin \phi = \frac{a}{L} \sin \theta \quad \text{y} \quad \cos \phi = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{L} \sin \theta\right)^2}$$

La velocidad angular del cigüeñal OA es $\dot{\theta}$ en sentido contrario a las agujas del reloj, y la velocidad angular de la biela es $\dot{\phi}$ en el sentido de las agujas del reloj. La conexión entre $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$ se obtiene diferenciando la Ec. (1).

$$a\dot{\theta} \cos \theta = L\dot{\phi} \cos \phi \quad \text{o} \quad \dot{\phi} = \frac{a \cos \theta}{L \cos \phi} \dot{\theta}$$

Las respuestas a los apartados (a), (b), y (c) se pueden obtener sustituyendo:

$$b = a, \quad L = 2a, \quad \text{y} \quad \theta = 0, \quad \text{o} \quad \pi/2$$

en las fórmulas anteriores. Estos casos especiales pueden resolverse de forma más directa de la siguiente manera:

- (a) Cuando $\theta = 0$ (denominada posición central muerta, superior), la velocidad del punto A es $a\dot{\theta}$, en posición vertical hacia arriba, y la velocidad del punto B es instantáneamente cero. Bajo estas condiciones, la biela AB se desplaza, en ese instante, lo mismo que una varilla ficticia idéntica que gira sobre un eje fijo a través de B con una velocidad angular $\omega_{AB} = a\dot{\theta}/2a$ en el sentido de las agujas del reloj. En esa varilla ficticia, la velocidad del punto G es claramente $\frac{a\dot{\theta}}{2}$, en posición vertical hacia arriba. En este instante, también es esa la velocidad del punto G en la varilla real.
- (b) Cuando $\theta = 0$, con la velocidad en A igual a $a\dot{\theta}$ y la velocidad de B igual a cero, la velocidad angular de la varilla real AB es la misma que la de la varilla ficticia descrita en el apartado anterior. En el sentido de las agujas del reloj:

$$\omega_{AB} = \frac{a\dot{\theta}}{2a} = \frac{\dot{\theta}}{2}$$

- (c) Cuando B no está en centro muerto, la velocidad de B es forzosamente horizontal. Cuando $\theta = \pi/2$, la velocidad del punto A es $a\dot{\theta}$, horizontalmente en dirección hacia la izquierda. Si A y B se mueven horizontalmente, la única forma de que AB permanezca rígido es que toda la varilla realice un movimiento de traslación con velocidad $a\dot{\theta}$, y no de rotación. La velocidad de G es $a\dot{\theta}$ horizontalmente hacia la izquierda.
- (d) La velocidad angular de AB cuando $\theta = \pi/2$ es cero.

Problema 4. Movimiento de un sistema de tres grados de libertad. Las variables x , ϕ , y ψ forman un conjunto completo e independiente de coordenadas generalizadas para el sistema que se muestra en la figura 5.

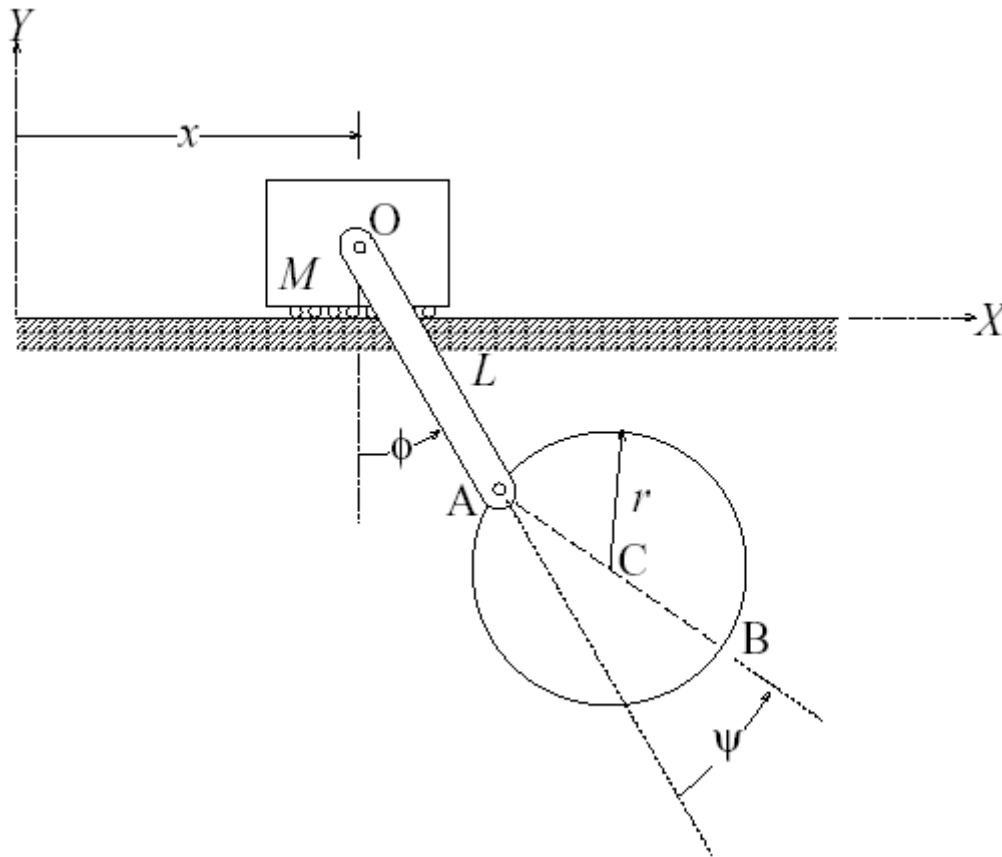


Figura 5: tres cuerpos rígidos que forzosamente tienen tres grados de libertad.

- (a) Para hallar la velocidad angular del disco, trace una línea a lo largo del diámetro AB y observe su velocidad de cambio de orientación respecto a una dirección de referencia fijada. Tomando la dirección de referencia como vertical, el ángulo formado por AB es $\phi + \psi$, por lo que:

$$\omega_{disco} = \dot{\phi} + \dot{\psi}$$

- (b) Para hallar los componentes de la velocidad del punto A obtenga, en primer lugar, los componentes de desplazamiento y, a continuación, diferéncielos respecto al tiempo. A partir de la figura 5 se observa que:

$$X_A = x + L \sin \phi \quad \text{y} \quad Y_A = y_O - L \cos \phi$$

donde y_O es la altura constante del punto del pivote O por encima del eje X. Los componentes de velocidad de A son:

$$v_X = \dot{X}_A = \dot{x} + L \dot{\phi} \cos \phi \quad \text{y} \quad v_Y = \dot{Y}_A = L \dot{\phi} \sin \phi$$