

## Boletín de problemas 6

---

---

**Problema 1**

**Varilla deslizando por una pared.** Los dos extremos de la varilla rígida de masa  $M$  y longitud  $L$  están en contacto con el suelo y con una pared vertical. Suponiendo que la fricción sea mínima, derive las ecuaciones que determinan el deslizamiento de la varilla.

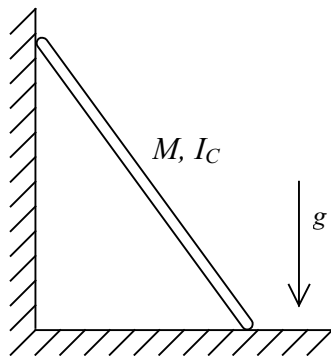


Figura 1: la varilla se desliza por una pared.

## Problema 2

**Un disco desequilibrado rueda por una pendiente.** Una partícula de masa  $m$  se clava a una distancia  $l$  del centro  $O$  de un disco rígido de radio  $r$  sin masa que rueda sin deslizarse por un plano inclinado con un ángulo  $\alpha$  en relación a la horizontal. Derive la ecuación diferencial que determina la coordenada generalizada  $\theta$  que se muestra a continuación.

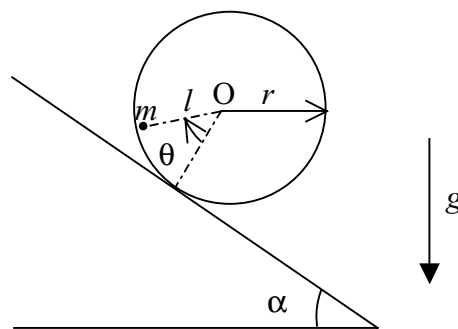


Figura 2: partícula de masa  $m$  clavada en un disco sin masa.

## Problema 3

**Modelo mecánico del andador sobre cuerda floja.** Los andadores profesionales sobre cuerda floja han aprendido a utilizar señales visuales, y señales neuronales enviadas desde los canales semicirculares del oído interno (sensibles al movimiento angular) para equilibrar su difícil posición ejerciendo torsión sobre los polos en equilibrio que portan. Los polos son generalmente tubos huecos de bambú que tienen las secciones de los extremos llenas de plomo para así aumentar la masa y el momento de inercia. Para tener una visión detallada del sofisticado proceso de control que el andador sobre cuerda floja se ha autoenseñado, proponemos estudiar un modelo mecánico muy simplificado del andador y de su pértiga de equilibrio. El objetivo de este problema es derivar la ecuación de movimiento del modelo inestable. En un boletín de problemas posterior volveremos a este modelo y diseñaremos un sistema de control capaz de estabilizar el modelo.

En la figura 4 consideramos un modelo mecánico simplificado que se comporta en cierta forma como

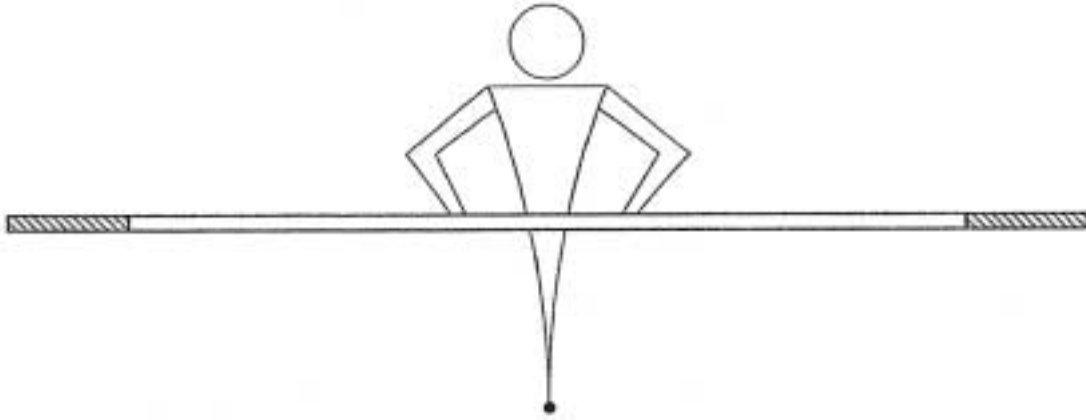


Figure 3: Tight-rope walker and balancing pole.

un hábil andador sobre cuerda floja. Se supone que la cuerda floja es un pivote  $O$  fijo y sin fricción que el artista modela como cuerpo rígido de masa  $m_1$  y momento de inercia  $I_1$  aproximadamente en el centro de masa  $C$ , que puede balancearse ejerciendo una torsión  $\tau$  sobre la pértiga de masa  $m_2$  y momento de inercia  $I_2$  aproximadamente en el centro de la masa.

Para mayor simplificación, se supone que la pértiga se sostiene de tal forma que los dos centros de masa coinciden en el plano del dibujo. La distancia entre el pivote  $O$  y el centro de la masa  $C$  es  $a$ . El sistema de control que se va a diseñar aplicará una torsión  $\tau(t)$  entre los dos cuerpos rígidos basándose en las señales de un sensor que indica los valores de los ángulos  $\theta(t)$  y  $\phi(t)$ . En esta etapa simplemente tomamos  $\tau(t)$  como la función de tiempo establecida. Cuando  $\tau(t)$  es positivo, la torsión sobre la varilla con momento de inercia  $I_2$  va en sentido contrario de las agujas del reloj y su reacción igual y opuesta en el cuerpo rígido con momento de inercia  $I_1$  va en sentido de las agujas del reloj.

Un andador hábil es capaz de mantener unas fluctuaciones muy pequeñas en los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  durante la actuación. Por lo tanto, resulta apropiado llevar a cabo el análisis bajo los supuestos de ángulo pequeño.

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{y} \quad \cos \theta \approx 1$$

- (a) Mediante las expresiones linealizadas, correctas para primer orden en los ángulos pequeños  $\theta$  y  $\phi$ , obtenga los componentes de desplazamiento y velocidad del punto  $C$ .
- (b) Dibuje un diagrama claro de cuerpo libre del cuerpo rígido que represente al artista, y del cuerpo rígido

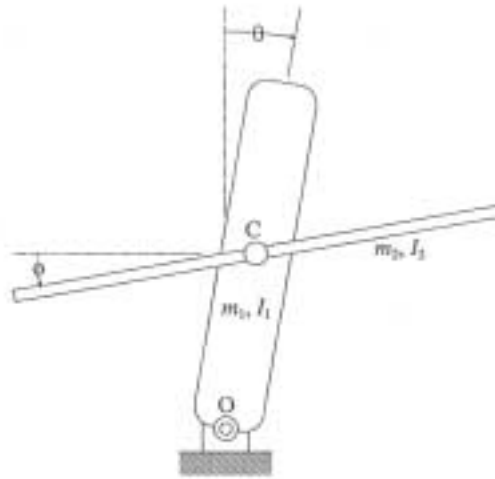


Figure 4: Mechanical model of tight-rope walker and balancing rod.

que represente a la pértiga de equilibrio, mostrando todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

- (c) Utilice las ecuaciones de momento lineal para calcular cada componente de fuerza de reacción en términos de las operaciones de los ángulos.
- (d) Aplique los principios de momento angular para obtener ecuaciones de movimiento para  $\theta(t)$  y  $\phi(t)$ .