

Soluciones del boletín de problemas 5

Problem 1. Partícula que se desliza por un plano inclinado móvil. El plano inclinado de masa M sólo puede moverse paralelo al eje X , y la partícula de masa m está restringida a permanecer en la superficie en cuesta del plano inclinado.

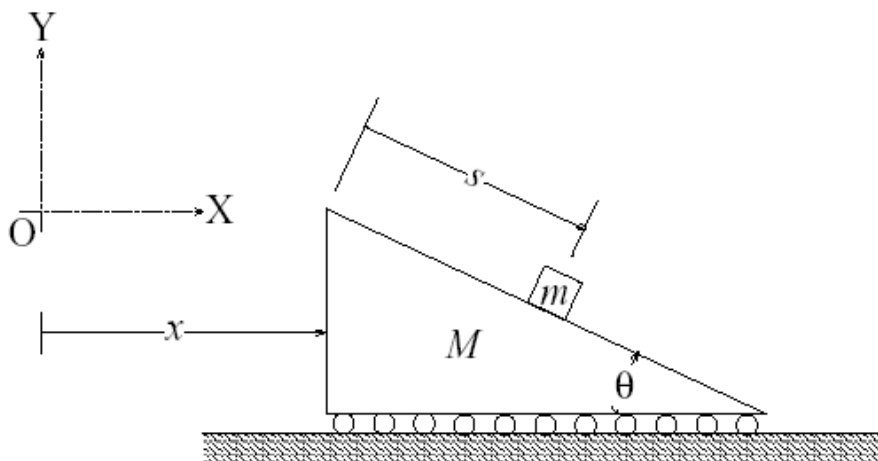


Figura 1: la masa m se desliza por un plano inclinado de masa M .

- (a) El plano inclinado M se localiza mediante la coordenada x , y una vez fijada la posición del plano inclinado, se determina la ubicación de la partícula de masa m proporcionando la distancia s en sentido descendente a la pendiente. Las coordenadas x y s forman un conjunto de coordenadas generalizadas completas e independientes para el sistema en concreto.
- (b) Para derivar las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas x y s comenzamos por estudiar el movimiento. La partícula m se traduce en ambas direcciones X e Y , mientras que el plano inclinado M lo hace solamente en la dirección X . No existe rotación. Las coordenadas X e Y de la partícula m son:

$$x_m = x + s \cos \theta \quad \text{y} \quad y_m = -s \sin \theta$$

por lo que las coordenadas de su velocidad son:

$$\dot{x}_m = \dot{x} + \dot{s} \cos \theta \quad \text{y} \quad \dot{y}_m = -\dot{s} \sin \theta$$

La velocidad del plano inclinado M es $\dot{x}_M = \dot{x}$

A continuación, para estudiar las fuerzas, dibujamos diagramas de cuerpo libre de la partícula m y del plano inclinado M por separado. Puesto que no existe

fricción, las fuerzas de reacción N_1 y N_2 son *normales* en relación a las superficies con las que están en contacto. Observe que la fuerza N_1 que actúa sobre el plano inclinado M es igual y opuesta a la fuerza N_1 que actúa sobre la partícula m .

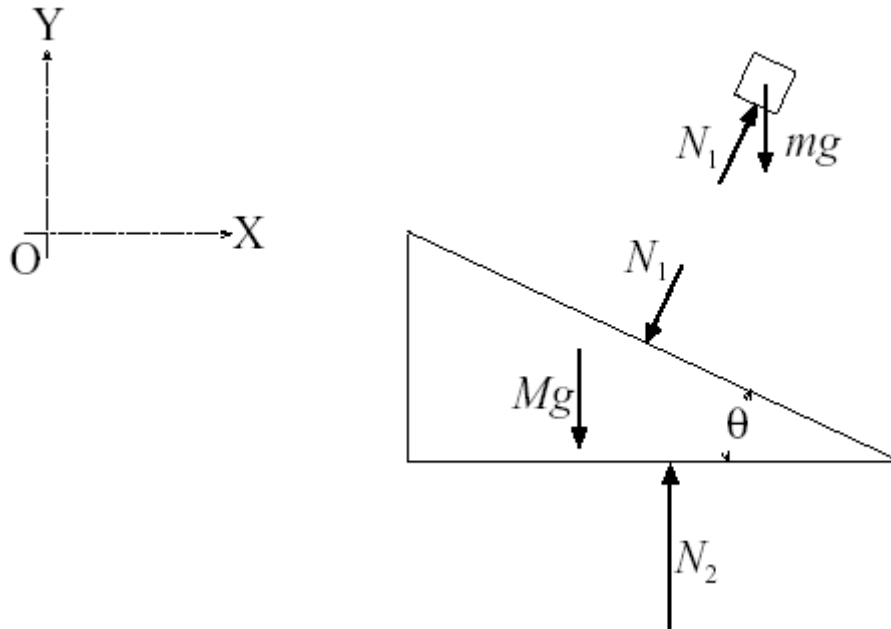


Figura 2: fuerzas actuando sobre una partícula m y sobre un plano inclinado M .

- (c) Las ecuaciones de movimiento se obtienen aplicando los principios de momento a la partícula m y al plano inclinado M . Tanto para una partícula como para un cuerpo rígido, el principio de momento lineal requiere que la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el objeto sea igual al tiempo de reacción del vector de momento lineal del objeto. En términos de los componentes x e y de los vectores implicados, tenemos:

$$\sum f_x = \frac{dp_x}{dt} \quad \text{y} \quad \sum f_y = \frac{dp_y}{dt}$$

Para la partícula m , los componentes x e y del momento lineal son:

$$p_x = m\dot{x}_m = m(\dot{x} + \dot{s} \cos \theta) \quad \text{y} \quad p_y = m\dot{y}_m = -m(\dot{s} \sin \theta)$$

y los componentes de fuerza que actúan sobre éste son:

$$\sum f_x = N_1 \sin \theta \quad \text{y} \quad \sum f_y = N_1 \cos \theta - mg$$

de forma que los resultados de aplicar los principios de momento lineal a la partícula tienen como resultado las dos ecuaciones siguientes:

$$N_1 \sin \theta = m(\ddot{x} + \cos \theta) \quad (1)$$

$$N_1 \cos \theta - mg = -m\ddot{s} \sin \theta \quad (2)$$

En el caso del plano inclinado M , las restricciones no permiten un movimiento vertical, por lo que solamente hay que tener en cuenta los componentes horizontales del principio de momento. El momento lineal horizontal es $P_x = M\dot{x}$ y la fuerza horizontal que resulta sobre el plano inclinado es $-N_1 \sin \theta$. El principio de momento requiere:

$$-N_1 \sin \theta = M\ddot{x} \quad (3)$$

Si se elimina la fuerza de reacción N_1 de estas tres ecuaciones para conseguir dos ecuaciones independientes se obtienen dos ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas x y s .

$$(M + m)\ddot{x} + m \cos \theta \ddot{s} = 0$$

La ecuación anterior se obtiene simplemente añadiendo la Ec.(3) a la Ec.(1). Se consigue una ecuación independiente multiplicando la Ec.(1) por $\cos \theta$, y multiplicando la Ec.(2) por $-\sin \theta$ y después añadiendo las dos para así obtener:

$$m\ddot{x} \cos \theta + m\ddot{s} = mg \sin \theta$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir perfectamente como una ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{M}{m} + 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g \sin \theta \end{Bmatrix}$$

Problema 2. Un disco rueda por una superficie cilíndrica. El dibujo de la figura 3 nos muestra un disco de radio r y masa m , que, comenzando desde la posición indicada por el círculo de líneas discontinuas rueda a través del ángulo θ para llegar a la posición indicada por el círculo de líneas continuas. En la posición original, el centro del disco estaba situado en C en el eje vertical OY. Después de rodar a través del ángulo θ en la superficie cilíndrica, el centro del disco está en C'.

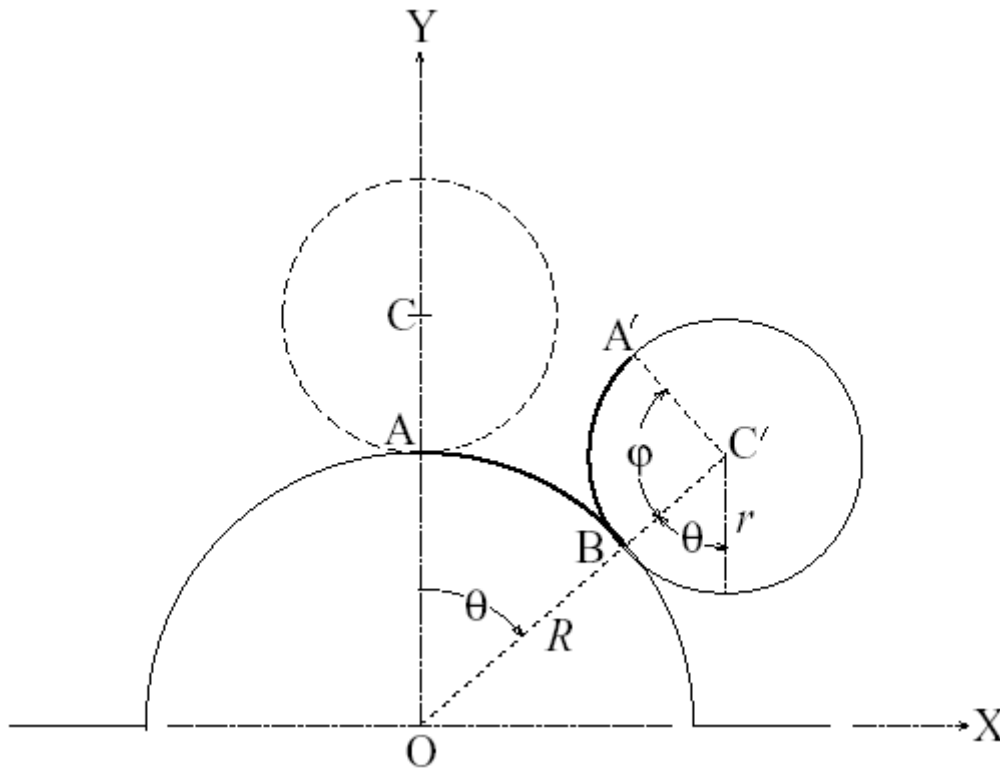


Figura 3: el disco de radio r rueda por una superficie cilíndrica fija de radio R .

Puesto que no hay deslizamiento, la longitud del arco $A'B = r\phi$ del disco debe ser la misma que la longitud de la trayectoria $AB = R\theta$. Esto implica que:

$$\phi = \frac{R}{r}\theta$$

- (a) La velocidad angular ω del disco es la velocidad de giro de una línea pintada en el disco en relación a una dirección de referencia fija. Considere la línea CA del disco, indicada por un círculo de líneas discontinuas, en su posición inicial. Una vez que el disco rueda a la posición indicada por el círculo de líneas continuas, la línea se encuentra ya en posición $C'A'$. En el origen esa línea era vertical, pero ahora forma un ángulo $\phi + \theta$ con la vertical.

La velocidad angular del disco es:

$$\omega = \frac{d}{dt}(\phi + \theta) = \frac{R+r}{r}\dot{\theta}$$

- (b) Se puede obtener la energía cinética de un cuerpo rígido calculando el valor de la siguiente fórmula:

$$KE = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \quad (1)$$

donde v_C es la magnitud de la velocidad del centro de masa C , y I_C es el momento de inercia del cuerpo rígido aproximadamente en el centro de su masa.

Para un disco sólido uniforme de radio r y masa m , $I_C = \frac{1}{2}mr^2$. Se puede obtener la velocidad del centro de masa C aplicando la siguiente fórmula general:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{BC}$$

que se aplica a dos puntos cualesquiera B y C sobre el mismo cuerpo rígido que tiene una velocidad angular de rotación $\vec{\omega}$. En el presente caso, el punto B del disco está instantáneamente en reposo, por lo que $\vec{v}_B = 0$, y la longitud del vector \vec{BC} es r , por lo que el vector \vec{v}_C tiene una magnitud $r\omega$ y está dirigido hacia los ángulos de la parte derecha de BC. Si sustituimos $v_C = r\omega$ y $I_C = \frac{1}{2}mr^2$ en la Ec.(1) obtenemos:

$$KE = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}m(r\omega)^2$$

Problema 3. Varilla que cae por efecto de la gravedad. En la figura 4 se muestran la posición inicial de la varilla y el marco de referencia inercial XOY con su origen O situado en el punto inicial de contacto del extremo B de la varilla.

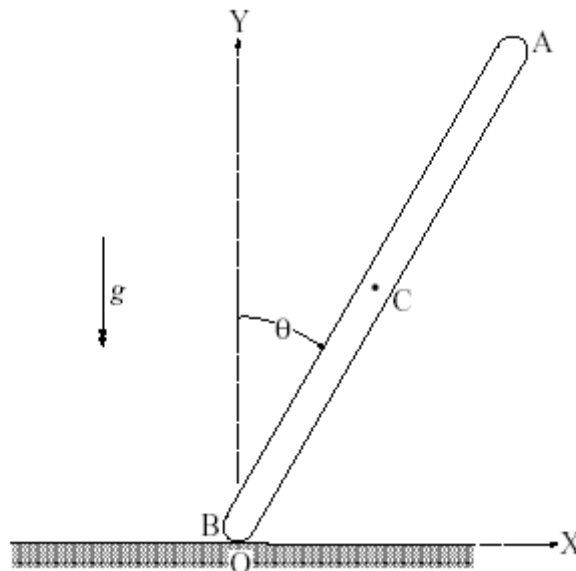


Figura 4: la varilla de masa m y longitud L se desliza por el suelo al caer.

La varilla se localiza completamente en las coordenadas x_C e y_C del centro de masa C y del ángulo θ que forma la varilla con la vertical. Sin embargo, estas coordenadas no son independientes, puesto que, debido a la restricción por la que el extremo B siempre permanece en contacto con el suelo, es necesario que se cumpla siempre la siguiente relación:

$$y_c = \frac{L}{2} \cos \theta$$

(a) El sistema limitado sólo tiene dos grados de libertad. Un conjunto independiente de coordenadas es x_C y θ , con la variable dependiente $y_C = \frac{L}{2} \cos \theta$. Otro conjunto de coordenadas independientes es x_C e y_C , con la variable dependiente $\theta = \cos^{-1} \frac{2y_C}{L}$. La siguiente operación algebraica es algo más sencilla con la primera elección.

(b) Estudiamos el movimiento utilizando las coordenadas generalizadas x y θ . A partir de los componentes de desplazamiento del centro de masa C,

$$x_C = x \quad y \quad y_C = \frac{L}{2} \cos \theta$$

los componentes de la velocidad se obtienen mediante diferenciación:

$$\dot{x}_C = \dot{x} \quad e \quad \dot{y}_C = -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta$$

La velocidad angular de la varilla es $\omega = \dot{\theta}$ en el sentido de las agujas del reloj.

A continuación, estudiamos las fuerzas dibujando un diagrama de cuerpo libre de la varilla en el que se indican todas las fuerzas que actúan sobre ésta. Véase la figura 5.

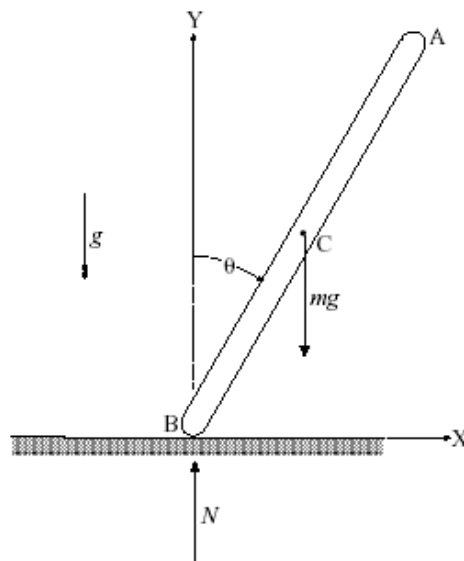


Figura 5: la varilla se ve influida por la gravedad mg y la reacción del suelo N .

No existen fuerzas horizontales que actúen sobre la varilla, por lo que se conserva el momento horizontal. La varilla está en reposo cuando se suelta en $t = 0$, lo que significa que el centro de la masa C no se desplaza horizontalmente mientras que la varilla cae. La ecuación de movimiento para la coordenada generalizada x es:

$$x = \frac{L}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{L}{4}, \text{ una constante}$$

Si se aplica el principio de momento lineal en la dirección vertical se obtiene la ecuación siguiente:

$$\sum f_y = N - mg = \frac{d}{dt}(m\dot{y}_C) = -m\frac{L}{2}(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

o,

$$N = m\left[g - \frac{L}{2}(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)\right] \quad (1)$$

y si se aplica el principio de momento angular sobre el centro de masa C, se obtiene lo siguiente:

$$\tau = N\frac{L}{2} \sin \theta = \frac{dH_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{L^2}{12}\omega\right) = m\frac{L^2}{12}\ddot{\theta} \quad (2)$$

Si se elimina la fuerza de reacción N entre las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la ecuación de movimiento para la coordenada generalizada θ

$$m\frac{L^2}{2} \sin \theta \left[\frac{g}{L} - \frac{1}{2}(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)\right] = m\frac{L^2}{12}\ddot{\theta}$$

o,

$$\ddot{\theta}(1 + 3 \sin^2 \theta) + 3\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = 6\frac{g}{L} \sin \theta \quad (3)$$

(c) Inmediatamente después de soltar la varilla, la variable θ sigue teniendo su valor inicial $\theta(0) = \pi/6$ y la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ también sigue teniendo su valor inicial $\omega(0) = 0$. Si se insertan estos valores en la Ec. (3) se obtiene:

$$\ddot{\theta}(0)\left[1 + \frac{3}{4}\right] = 3\frac{g}{L} \quad \text{or} \quad \ddot{\theta}(0) = \frac{12}{7}\frac{g}{L} \quad (4)$$

(d) El valor inicial de la fuerza de reacción del suelo N se obtiene sustituyendo los valores iniciales $\theta(0) = \pi/6$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\ddot{\theta}(0) = \frac{12g}{7L}$ en la Ec. (1) para obtener:

$$N(0) = mg\left(1 - \frac{1}{2} \frac{12}{7} \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{7}mg$$