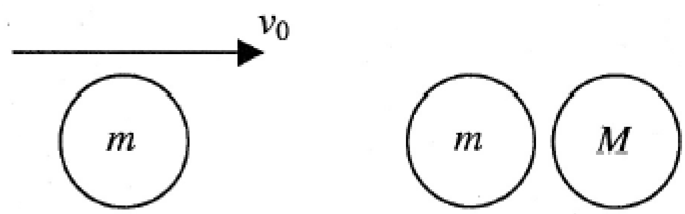
2.004 MODELISMO, DINÁMICA Y CONTROL II Primavera 2003

Boletín de problemas 3

Problema 1

Las dos masas a la derecha del dibujo están ligeramente separadas e inicialmente en reposo. La masa de la izquierda es incidente, con una velocidad v_0. Suponiendo que se produzcan choques frontales perfectamente elásticos, determine el número de colisiones que tienen lugar y halle las velocidades finales.

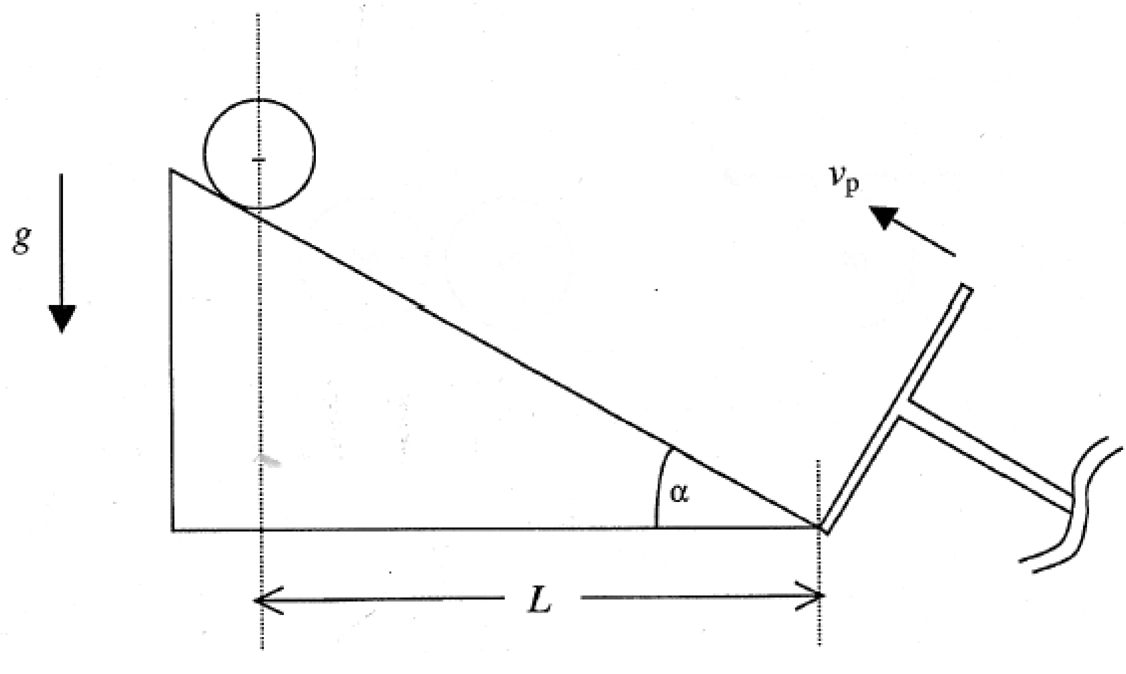


Problema 2

Se suelta un pelota de radio insignificante con velocidad inicial cero en una pendiente de ángulo α, tal como se muestra a continuación. Al mismo tiempo, se pone en movimiento un pistón en la misma pendiente con velocidad constante v_p. La distancia horizontal inicial entre la pelota y el pistón es L, y la aceleración a causa de la gravedad es g. Después de soltar la pelota, ésta se desplaza pendiente abajo sin fricción y choca contra el pistón en movimiento. El coeficiente de restitución para este impacto es e. Inmediatamente después del impacto, el pistón se detiene.

(a) Halle el tiempo t_1 del impacto.

(b) Determine la altura máxima h_{max} que alcanzará la pelota después del impacto. (h_{max} se mide desde la base horizontal de la pendiente).



Problema 3

Clavar un clavo en un 2 x 4.

Considere el problema clásico en el que se clava un clavo en un trozo de madera. Un carpintero hábil balancea un martillo de forma que la cabeza del martillo (de masa M) golpea el clavo (de masa m) en el centro con una velocidad V_0. Como resultado del impacto, el clavo, que ya había penetrado a una profundidad x_0, penetra más en la madera con una velocidad inicial v_1. Después de la penetración adicional δ, el clavo queda en reposo con una penetración final de $x_0 + \delta$. La tarea que le encomendamos es desarrollar modelos para la relación entre la penetración adicional δ y la velocidad del martillo V_0. En concreto, se le pide que desarrolle modelos que utilicen los datos de la prueba en la que:

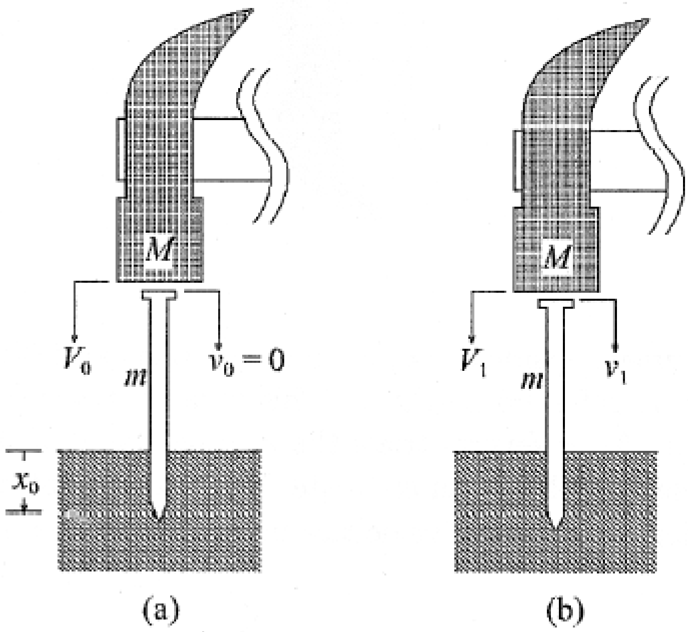
$M = 0.5$ Kg $\qquad\qquad m = 0.005$ Kg

$x_0 = 10$ mm

$V_0 = 10$ m/s

$\delta = 2$ mm

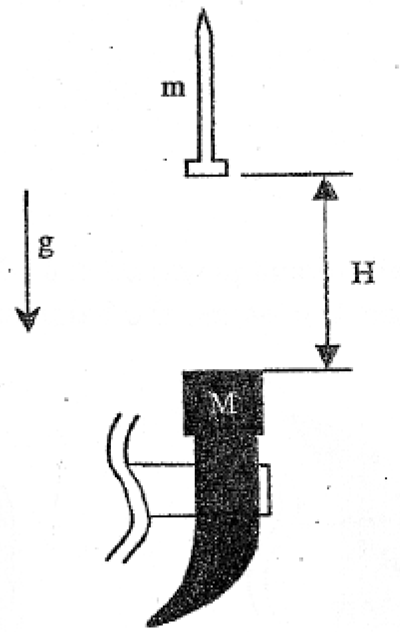
para predecir la magnitud de la penetración adicional δ cuando, con el mismo martillo, el mismo clavo y la misma penetración inicial x_0, la velocidad del martillo disminuye a $V_0 = 5$ m/s.



Podemos dividir la acción total asociada a clavar el clavo en dos etapas: la *etapa de impacto*, en la que existe una fuerza impulsiva grande entre el martillo y el clavo durante el pequeñísimo intervalo de contacto entre los dos elementos; y la *etapa de penetración*, en la que la velocidad inicial del clavo, v_1, queda obstaculizada por las fuerzas resistentes de la madera. En la etapa de impacto, los efectos de las fuerzas ordinarias, tales como la gravedad, y las fuerzas resistentes de la madera son tan pequeños en comparación con los efectos de las fuerzas impulsivas, que pueden omitirse temporalmente. En la parte (a) de la figura anterior se muestra la situación justamente previa al impacto. La cabeza del martillo tiene una velocidad V_0 y el clavo no experimenta movimiento ($v_0 = 0$). Inmediatamente después del impacto, el clavo tiene una velocidad v_1 y la cabeza del martillo tiene una velocidad reducida V_1, tal como se muestra en la parte (b) de la figura anterior.

(a) Establezca un modelo de impacto con dos masas aisladas, M y m, y las condiciones iniciales que se muestran en la parte (a) de la figura anterior. Aplique la conservación del momento lineal para obtener una ecuación que relacione las velocidades v_1 y V_1 con la velocidad inicial V_0 de la cabeza del martillo.

(b) Con el fin de obtener una segunda ecuación, realizamos un experimento con el martillo y el clavo, para así calcular el coeficiente de restitución e.



Sujetamos el martillo al revés en una mano y con cuidado soltamos el calvo desde una altura H y medimos la altura de rebote h. Esto resulta un poco complicado, ya que el clavo debe soltarse en una posición perfectamente vertical. Después de varios intentos, el valor medio de la relación h/H es 0.1. Utilice este resultado para calcular el coeficiente de restitución e. A continuación, derive una segunda ecuación que relacione las velocidades v_1 y V_1 con la velocidad V_0 de la cabeza del martillo.

(c) Resuelva el problema para la velocidad inicial v_1 del clavo.

En la etapa de penetración, el clavo de masa m penetra aún más en la madera con una velocidad inicial v_1. Las fuerzas que actúan sobre el clavo son: la gravedad y las fuerzas de reacción que ejerce la madera sobre el clavo. Previo al impacto, las fuerzas que actúan sobre el clavo están en equilibrio. La fuerza de la gravedad está equilibrada por una reacción igual y opuesta procedente de la madera. Con el fin de modelar este comportamiento, suponemos que la madera sigue suministrando un componente de fuerza para equilibrar la fuerza de la gravedad, que se genera una resistencia adicional R opuesta a la velocidad del clavo. Se le pide que considere dos supuestos distintos acerca de la fuerza de resistencia R.

(d) **Resistencia lineal de viscosidad**. El modelo más sencillo de resistencia a la velocidad es el modelo lineal utilizado en el problema 1 del boletín de problemas 1.

$$R = bv$$

Esta suposición es sencilla, aunque no muy realista para el problema de penetración del clavo. Supone que una pequeña fuerza firme sobre el clavo permitiría una penetración continua lenta. Además, supone que la resistencia es independiente de la profundidad de penetración x. A pesar de los defectos, utilice la suposición lineal para derivar una ecuación que relacione la penetración adicional δ con la velocidad V_0 de la cabeza del martillo.

(e) Utilice la fórmula que acaba de derivar y los datos proporcionados para evaluar la magnitud del coeficiente de resistencia de viscosidad b.

(f) **Fricción de Coulomb dependiente de la penetración**. Un modelo más realista para la resistencia de penetración es un comportamiento del tipo fricción seca con la magnitud de la fuerza de resistencia estática limitante proporcional a la profundidad de penetración x. En el modelo estándar para la fricción de Coulomb, se presiona un bloque contra una superficie inmóvil con una fuerza normal N. A continuación, se aplica una fuerza tangencial F para tratar de deslizar el bloque por la superficie. En el modelo de Coulomb, no se experimenta ningún movimiento hasta $F = \mu_S N$, donde μ_S es el coeficiente de fricción estática que depende de los materiales, la temperatura y la presencia de cualquier lubricante. Una vez que el bloque está en movimiento, la fuerza de fricción cinética F que actúa como resistencia al deslizamiento es generalmente igual, o algo inferior, a la fuerza de fricción estática limitante.

En el caso del clavo que penetra en un bloque de madera, la fuerza normal es suministrada por la presión radial de la madera en contacto con el segmento penetrado del clavo. Es posible suponer que la fuerza normal efectiva total N que actúa sobre el clavo es proporcional a la profundidad de penetración x. Es decir:

$$N = nx$$

donde n es una constante con las dimensiones de fuerza por unidad de longitud. Por tanto, la fricción estática limitante es:

$$F = \mu_S nx$$

Una vez que el clavo comienza a moverse, puede suponer que la fuerza de resistencia cinética tiene la forma siguiente:

$$R = \mu_k n x$$

donde el coeficiente de fricción cinética μ_k es una constante sólo ligeramente inferior al coeficiente de fricción estática.

Formule la ecuación de movimiento para el clavo bajo estas condiciones. Integre la ecuación entre los límites de $x = x_0$ con $v = v_1$ y $x = x_0 + \delta$ con $v = 0$ para obtener una relación a partir de la cual sea posible determinar el parámetro $\mu_k n$ con los datos proporcionados. Evalúe el parámetro $\mu_k n$.

(g) Prediga la magnitud de la penetración adicional δ para el caso en el que la velocidad del martillo es V_0 = 5 m/s, pero el resto de datos permanecen invariables, en base al modelo de resistencia lineal de viscosidad.

(h) Repita el apartado (g) para el modelo de fricción de Coulomb.